

# Serie 12

# Prüfung

Name
------

Vorname
---------

54 Pt. total
-----------------

30

Note
------

- Lösungen ohne verständliche Herleitung geben keine Punkte.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 80 Minuten.

## Aufgabe 1 (4x2 Pt.)

8 Pt.
----------

4

- (a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion:  $y = \sqrt{3-x}$

$$3-x \geq 0$$

$$\underline{x \leq 3}$$

$$\text{Variablen: } \underline{\underline{D = (-\infty, 3]}}$$

- mit "<": 1 Pt.

- (b) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion:  $y = \frac{x^3}{\cos(x) + 1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{\cos(-x) + 1} = \frac{-x^3}{\cos(x) + 1} = -\frac{x^3}{\cos(x) + 1} = -f(x)$$

also: ungerade Funktion

- nur Beispiel eingesetzt: 0 Pt.

- (c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von:  $y = 4 \cdot e^{x-\frac{1}{3}}$   
(Resultat in der Form  $y = f^{-1}(x)$ )

$$\ln(y) = \ln(4) + x - \frac{1}{3}$$

$$x = \ln(y) - \ln(4) + \frac{1}{3}$$

$$x \leftrightarrow y:$$

$$\underline{\underline{y = \ln(x) - \ln(4) + \frac{1}{3}}}$$

- (d) Kommentieren Sie in einigen Stichworten diese Rechenregel:  $\sqrt[4]{x^4} = x$

- stimmt nur für  $x \geq 0$ , denn  $\sqrt[4]{(-1)^4} = +1$

- richtig wäre:  $\sqrt[4]{x^4} = |x|$

-  $\sqrt[4]{x^4}$  ist nur Umkehrfunktion von  $x^4$  für  $x \geq 0$

Aufgabe 2 (2+3+2+3+3 Pt.)

13  
Pt. 7

- (a) Sie haben eine Parabel mit der Funktionsgleichung  $y = 2 \cdot x^2$ . Sie verschieben die Parabel so, dass der Scheitel in den Punkt  $(3; -4)$  zu liegen kommt. Wie lautet die Funktionsgleichung nun? Lösen Sie diese Aufgabe mit einer Koordinaten-Transformation.

$$(y+4) = 2 \cdot (x-3)^2 \quad \textcircled{1}$$

$$\underline{\underline{y = 2 \cdot (x-3)^2 - 4 = 2x^2 - 12x + 14}} \quad \textcircled{2}$$

- pro Regel 1 Pt. Abzug

- (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, welche die Nullstellen  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 2$  hat und die  $y$ -Achse bei  $y = 10$  schneidet.

- mit Gl.-Sfs. vorgehend: max 1 Pt.

$$y = a \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

$$y(0) = a \cdot (1) \cdot (-2) = -2a = 10 \implies a = -5$$

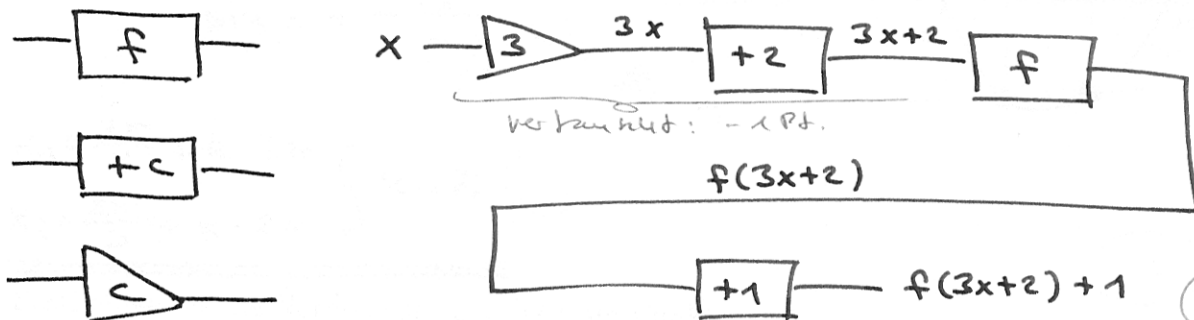
also:  $\underline{\underline{y = -5 \cdot (x+1) \cdot (x-2) = -5x^2 + 5x + 10}}$  alleine: ①

- (c) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zusammensetzung (Serienschaltung) zweier quadratischer Funktionen ist wieder eine quadratische Funktion.

falsch: wenn z.B.  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x^2$   
dann ist  $g(f(x)) = x^4$ , also nicht quadratisch!

- richtig: 0 Pt.

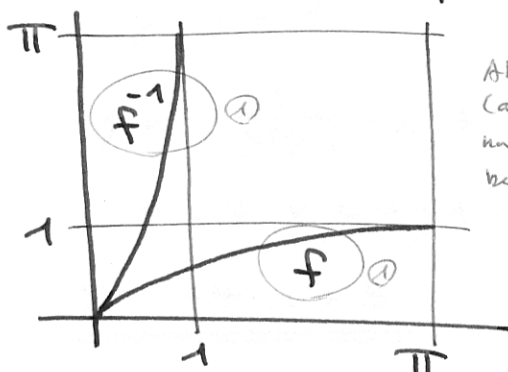
- (d) Konstruieren Sie mit folgenden Funktionsblöcken die Funktion  $y = 1 + f(3 \cdot x + 2)$ .



- ohne Zahlenwerte: - 1 Pt.

- (e) Skizzieren Sie den Grafen der Funktion  $y = \sin(x/2)$  für  $0 \leq x \leq \pi$  zusammen mit der Umkehrfunktion.

Sinus-Kurve, um Faktor 2 in  $x$ -Richtg. gestreckt.



Alles richtig anzeichnen: ①  
(alle 4 Punkte) und nur, falls die ersten beiden Punkte.

3

Aufgabe 3 (5+2+3+3 Pt.)

(a) Berechnen Sie:

$$(-3x + 2)' = \underline{\underline{-3}}$$

$$\tan'(\pi/4) = \frac{1}{\cos^2(\pi/4)} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = \underline{\underline{2}}$$

$$(\pi^2)' = \underline{\underline{0}} \quad (\text{konstant})$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^{-1/3})' = \underline{\underline{-1/3 \cdot x^{-4/3}}}$$

$$(x^{a-1})' = \underline{\underline{(a-1) \cdot x^{a-2}}}$$

war richtig/falsch!

5

(b) Mit welcher Steigung schneidet  $y = \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$  die  $t$ -Achse bei  $t = 0$ ?

$$y' = 2\pi \cdot 50 \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t) \quad (1)$$

$$y'(0) = 2\pi \cdot 50 \cdot \cos(0) = \underline{\underline{100\pi}} \quad (1)$$

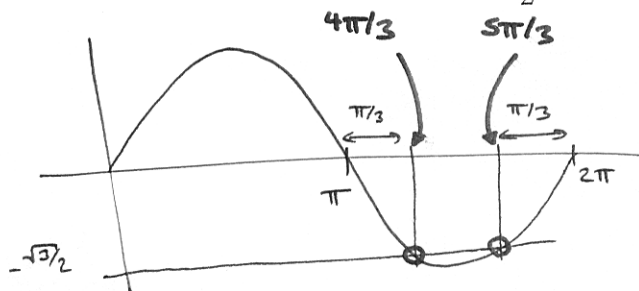
- sin statt cos: 1 Pt.

2

(c) An welchen Stellen haben die Tangenten an den Grafen  $y = \cos x$  die Steigung  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ?  
(Bogenmaß, alle Lösungen)

$$y' = -\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

3

(d) Bestimmen Sie die Normale an  $y = \sqrt[4]{x}$  im Punkt  $x = 1$ .

$$y' = \frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} \quad \text{— noch kein Punkt !!}$$

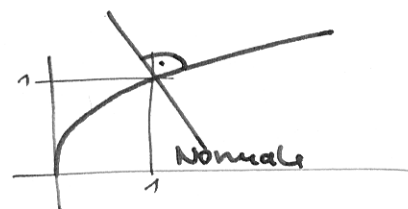
$$y'(1) = \frac{1}{4} \quad y(1) = 1$$

$$\text{einsetzen: } y = -\frac{1}{y'(1)} \cdot x + \frac{1}{y'(1)} + y(1)$$

$$= -4 \cdot x + 4 + 1$$

$$\underline{\underline{y = -4 \cdot x + 5}}$$

- Punkt nur für Substanz!



3

Aufgabe 4 (4+6 Pt.)

- (a) Berechnen Sie für die Funktion  $y = 5 \cdot x + 2$  den Differenzialquotienten  $\frac{dy}{dx}$ .  
Berechnung von Grund auf mit Limes.

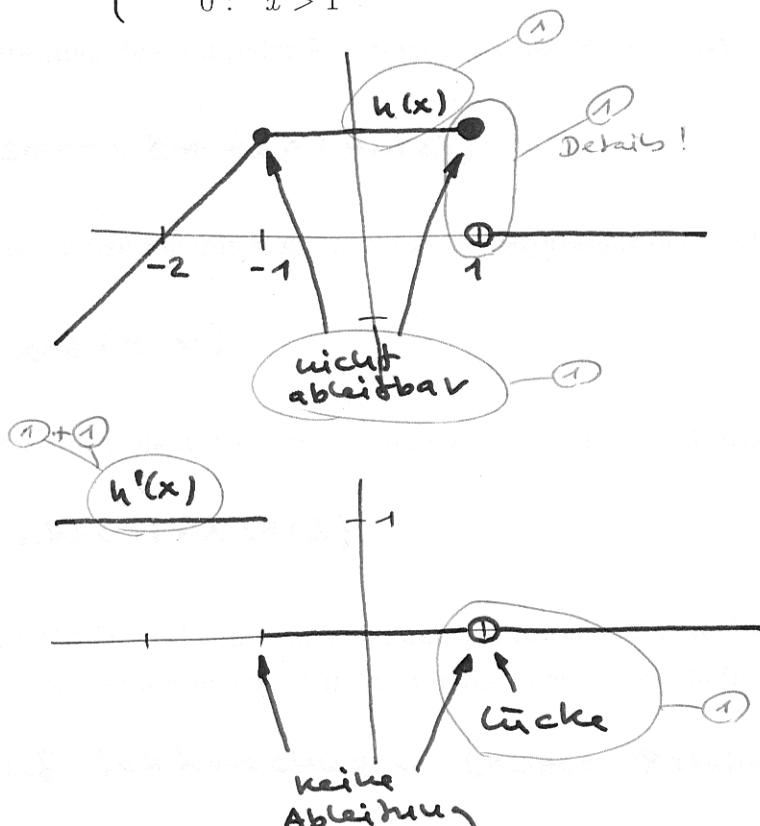
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot (x+\Delta x) + 2 - (5 \cdot x + 2)}{\Delta x} \quad (2) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot x + 5 \cdot \Delta x + 2 - 5 \cdot x - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= \underline{\underline{5}} \quad (2) \end{aligned}$$

- an der Stelle  $x_0$ : -1 Pt.  
(Antwort selber gemacht + korrigiert)

4

- (b) Zeichnen Sie die Funktion und deren Ableitung ohne zu rechnen.

$$h(x) := \begin{cases} x+2 & : x < -1 \\ 1 & : -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$



6

Aufgabe 5 (3x1 + 2 + 5x1 Pt.)

10  
Pt.  
6

- (a) Wie können Sie in MATLAB die Zahl  $x$  auf zwei Stellen nach dem Komma runden?

$\text{round}(x * 100) / 100$

1

- (b) Geben Sie in MATLAB folgende Zahlenwerte ein:  $120 \text{ n}$ ,  $33.2 \text{ M}$ ,  $6.3 \mu$

$120 \text{ e} - 9$   
 $33.2 \text{ e} 6$   
 $6.3 \text{ e} - 6$

1

- (c) Sie haben einen  $10'000 \times 1$ -Vektor  $v$  und möchten wissen, ob  $v$  eine negative Zahl enthält. Mit welchem Befehl stellen Sie dies fest?

$\text{min}(v)$

1

- (d) Das geometrische Mittel von  $n$  Zahlen ist die  $n$ -te Wurzel des Produkts der Zahlen. Wie können Sie möglichst einfach das geometrische Mittel eines Zahlen-Vektors unbekannter Größe berechnen?

$\text{prod}(v) \wedge (1 / \text{length}(v))$

2

- (e) Im MATLAB-Vektor Winkel sind einige Winkel im Bogenmaß abgelegt. Wie erhalten Sie den Vektor dieser Winkel in Gradmaß?

$\text{Winkel} / \text{pi} * 180$

1

- (f) Berechnen Sie mit jeder Komponente  $x$  des MATLAB-Vektors  $v$ :  $\sqrt{2 \cdot e^{x^2}}$

$\text{sqrt}(2 * \text{exp}(v.^2))$

1

- (g) Wie können Sie mit MATLAB das Skalarprodukt der beiden Vektoren  $x$  und  $y$  berechnen?

$\text{dot}(x, y)$

1

- (h) Berechnen Sie mit jedem Element  $x$  der MATLAB-Matrix  $M$ :  $\sqrt[3]{|x|}$

$\text{abs}(M) . \wedge (1/3)$

1

- (i) Mit MATLAB kann man eine Funktion mit einem Befehl auf ganze Vektoren oder Matrizen von Zahlen anwenden. Auf was für Rechner-Typen läuft MATLAB besonders schnell?

auf Vektorrechenen (=spez. Parallelrechen)

1