Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Analysis
Klasse 2d	8.5.2003
Serie 36	**Prüfung**

Name	Vorname	52 Pt. total	→	Note

- Lösungen ohne verständliche Herleitung geben keine Punkte.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 75 Minuten.

Aufgabe 1 (3+3+4+4 Pt.)

14 Pt.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx =$ FALSCH: $= [\ln x]_{-1}^{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln(-1)}_{???}$ bzw. $\underbrace{\ln(|-1|)}_{0}$

(dieser Weg gibt 0 Pt.!)

sondern: $= \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx}_{-\infty} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx}_{+\infty}$ (1) $=$ divergiert

3

(b) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx \underset{a=1}{\overset{\boxed{85}}{=}} \left[\frac{1}{2}\cdot \arctan(x^2)\right]_0^\infty$ (1)

– pro Fehler 1 Pt. Abzug.

$= \left(\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\arctan(b^2)\right) - \frac{1}{2}\arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ (2)

3

(c) $\int_0^2 x\cdot e^{4x^2}\,dx = \int_0^{16} x\cdot e^u \cdot \frac{1}{8x}\cdot du = \frac{1}{8}\cdot\int_0^{16} e^u \cdot du$ (1) (1)

$u = 4x^2$

$\frac{du}{dx} = 8x$

$dx = \frac{1}{8x}\cdot du$ (1)

$= \frac{1}{8}\cdot[e^u]_0^{16} = \frac{1}{8}\cdot(e^{16}-1)$ (1)

4

(d) Bestimmen Sie Nullstellen, Pole und Asymptote von $y = \frac{x^3 - x^2}{x^2+1}$

Nullstellen: $x^3 - x^2 = 0$: $x^2\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$ (1) (doppelt)

Pole: $x^2+1 = 0 \Rightarrow$ keine (1)

Asymptote: $(x^3 - x^2) \div (x^2+1) = \underbrace{x-1}_{y = x-1} + \frac{-x+1}{x^2+1}$

$$\begin{array}{l} x^3 + x \\ \hline -x^2 - x \\ -x^2 - 1 \\ \hline -x + 1 \end{array}$$

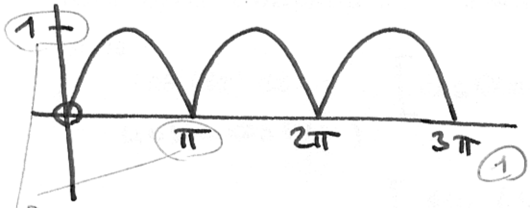
$y = x - 1$ (2)

4

Aufgabe 2 (4+3+5 Pt.)

12 Pt.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $y = |\sin x|$, und berechnen Sie deren quadratischen Mittelwert.



(1)

muss für 1 Pt. aufgehen sin, + Periodizität erkennbar!

$$\text{also: } \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot dx} \quad (1)$$

$$\overset{\boxed{205}}{=} \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi}} \quad (1)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad (1)$$

4

(b) $\lim\limits_{k \to 4} \dfrac{k^2 - 16}{\sqrt{k} - 2}$ $= \lim\limits_{k \to 4} \dfrac{(k+4) \cdot (k-4)}{\sqrt{k} - 2}$

– Ansatz (auch B.H.): 1 Pt.
– 1 Fehler : 2 Pt.
– 100% richtig : 3 Pt.

$$= \lim_{k \to 4} \frac{(k+4)(\sqrt{k}+2)\cancel{(\sqrt{k}-2)}}{\cancel{\sqrt{k}-2}}$$

$$= \lim_{k \to 4} (k+4)(\sqrt{k}+2) = \underline{\underline{32}}$$

3

– Mehr als 1x "lim" vergessen : –1 Pt.

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = y$ (vollständige Herleitung)

$$\ln(y) = \lim_{n \to \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \quad (1)$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \text{"}\infty \cdot 0\text{"}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + 1/n} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}} \quad (1)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \quad (1)$$

$$\ln(y) = 1 \implies y = \underline{\underline{e}} \quad (1)$$

5

– Mehr als 1x "lim" vergessen : –1 Pt

Aufgabe 3 (7+6 Pt.)

13 Pt.

(a) Berechnen Sie mit partieller Integration:
ACHTUNG: Korrektur und Punkte nur bis zum ersten Fehler!

$$\int_0^{\pi/16} \cos^2(2x)\,dx = \left[\cos(2x)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right]_0^{\pi/16} - \int_0^{\pi/16} 2\cdot(-\sin 2x)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sin(2x)\cdot dx$$

$u = v' = \cos(2x)$ (1) (1) (1)

$$= \underbrace{\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\pi/16}} + \int_0^{\pi/16} \underbrace{\sin^2(2x)}_{1-\cos^2(2x)}\cdot dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}/2}{4} \;(1) + \frac{\pi}{16} \;(1) - \int_0^{\pi/16} \cos^2(2x)\cdot dx \;(1)$$

also:

$$2\cdot\int_0^{\pi/16} \cos^2(2x)\cdot dx = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\pi}{16}$$

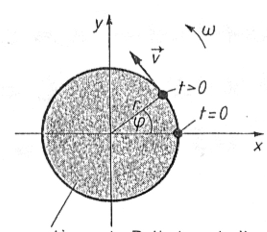
somit: $\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{16} + \dfrac{\pi}{32}}}$ (1)

7

(b) Eine Zylinderscheibe vom Radius r rotiert in einer Flüssigkeit mit einer nach dem Zeitgesetz

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-kt}, \qquad t \geq 0$$

exponentiell abnehmenden Umfangsgeschwindigkeit v. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ω und des Drehwinkels φ für den Anfangswert $\varphi(0) = 0$.



rotierende Zylinderscheibe

$$\underline{\underline{\omega(t)}} = \frac{v(t)}{r} = \underline{\underline{\frac{v_0}{r}\cdot e^{-k\cdot t}}} \;(1) \qquad \omega_0 = \frac{v_0}{r}$$

$\dot{\varphi} = \omega$:

$$\varphi(t) = \int \omega(t)\cdot dt = \int \frac{v_0}{r}\cdot e^{-kt}\cdot dt \;(1)$$

$$= \frac{v_0}{r}\cdot\frac{1}{-k}\cdot e^{-kt} + C_1$$

$$= -\frac{v_0}{r\cdot k}\cdot e^{-kt} + C_1 \;(1)\;(1)$$

$$\varphi(0) = -\frac{v_0}{r\cdot k} + C_1 \overset{!}{=} 0 \implies C_1 = \frac{v_0}{r\cdot k} \;(1)$$

also: $\underline{\underline{\varphi(t) = \dfrac{v_0}{r\cdot k}\cdot\left(1 - e^{-kt}\right)}}$ (1)

6

Aufgabe 4 (4+3+6 Pt.) | 13 Pt.

(a) Ein Kollege von Ihnen hat die Koordinaten von 700 Messwerten in den MATLAB-Vektoren x und y gespeichert. Nun möchte er eine Kurve genau durch die Messwerte zeichnen:

```
>> xx = linspace(min(x),max(x));
>> p = polyfit(x,y,701);
>> yy = polyval(p,xx);
>> plot(xx,yy)
```

Was halten Sie hiervon? Bitte *alle* möglichen Probleme oder Fehler markieren und mit Stichworten erklären.

bei 700 Messwerten der Grafik: linspace(...., 7000) oder so... (1)

Grad d. Polynoms = eins weniger: sollte 699 sein! (1)

Gibt bei so vielen Punkten Probleme:
- Schwingungsneigung an Rändern
- Rechenzeit
- Genauigkeitsprobleme

(2)

(für 2 von den 3)

4

(b) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches ein Grafik-Fenster mit Seitenlänge 1 öffnet, mittels Maus einen Punkt einliest und dort den Text "Hier" auf den Bildschirm schreibt.

```
>> clf        ← geht auch ohne...
>> axis([0 1 0 1])          (1)
>> [x y] = ginput(1);       (1)
>> text(x,y,'Hier')         (1)
```

3

(c) Sie haben die Funktion $f(x) := 0$ für $x \leq 0$ definiert und wollen für $x > 0$ ein Polynom $p(x)$ „glatt" anschließen. Sie wissen außerdem, dass das Polynom in $p(1) = 4$ einen Wendepunkt hat. Bestimmen Sie $p(x)$.

4 Bedingungen $\Rightarrow$ Polynom 3. Grades: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (1)

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

(1) $p(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$p'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

(1) $p(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4$

$p''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$

$\Rightarrow a = -2, \; b = 6$ (2)

also: $p(x) = -2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2$ (1)

6