Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Analysis
Klasse 2d	10.7.2003
Serie 48	**Prüfung**

Name	Vorname	Pt. total: 40	→	Note

- Lösungen ohne verständliche Herleitung geben keine Punkte.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (5+2+3 Pt.)

10 Pt.

(a) Eine kubische Parabel (Parabel dritter Ordnung) besitzt auf der y-Achse einen Sattelpunkt, und die Tangente durch den Kurvenpunkt $(-1; -3)$ geht durch den Ursprung. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel.

$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \qquad y' = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c \qquad y'' = 6a \cdot x + 2b$ 1

Sattelpunkt: $y'(0) = 0 \; : \; c = 0$

$y''(0) = 0 \; : \; b = 0$ 1

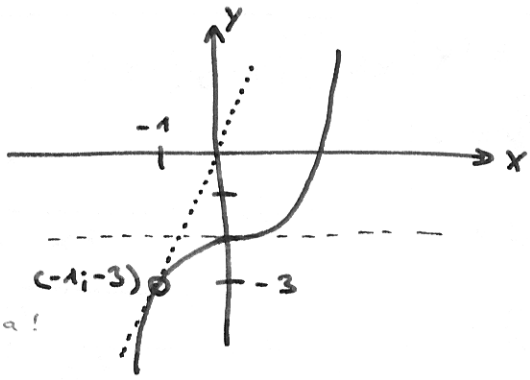
Punkt: $y(-1) = -3 : \; -3 = -a + b - c + d = -a + d \Rightarrow d = -2$

Tangente: $y'(-1) = 3 : \; 3 = 3a - 2b + c = 3a \Rightarrow a = 1$ 1

also: $\underline{\underline{y = x^3 - 2}}$ 2

5

(b) Skizzieren Sie Ihre Lösung von Teilaufgabe a zusammen mit den Angaben aus der Aufgabenstellung und kontrollieren Sie Ihre Lösung.



2

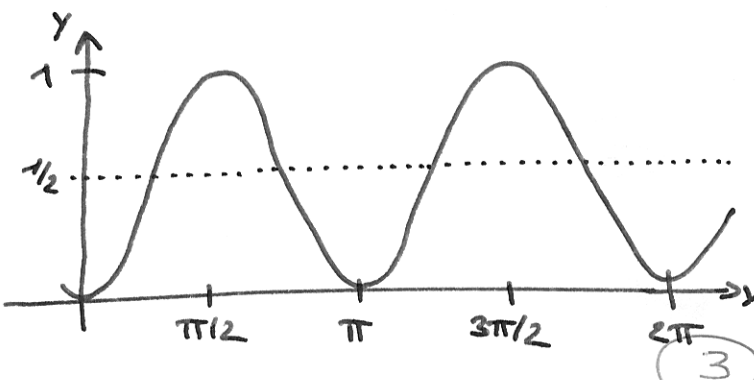
– nur Pt. möglich, falls Lösung in TA a!
– offensichtlich falsch und Fehler nicht markiert: 0 Pt.

(c) Die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ spielt in der ET eine große Rolle. Bringen Sie $f(x)$ erst in eine Form, an der sich alle wesentlichen Funktionseigenschaften direkt ablesen lassen und skizzieren Sie dann $f(x)$.

Gemäss FS:

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x))$

$= \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$ 1

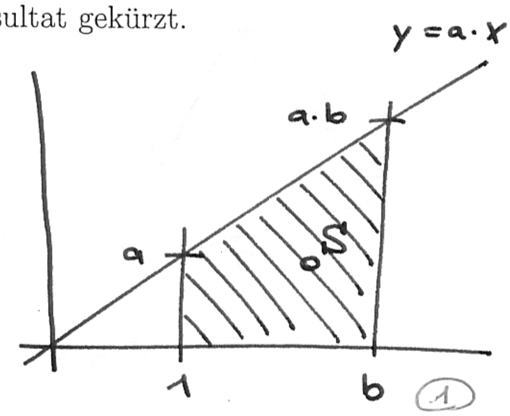


3

Aufgabe 2 (5+5 Pt.)

10 Pt.

(a) Eine Fläche ist begrenzt durch $y = a \cdot x$, durch die x-Achse, durch $x = 1$ und durch $x = b$. Berechnen Sie die x-Koordinate des Schwerpunktes. Resultat gekürzt.



(1)

$$A = \frac{a \cdot b^2}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot (b^2 - 1)$$ (1)

$$x_S = \frac{1}{A} \int x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \frac{2}{\cancel{a} \cdot (b^2-1)} \int_1^b x \cdot (\cancel{a} \cdot x) \cdot dx$$ (1)

$$= \frac{2}{b^2-1} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^b$$

$$= \frac{2}{3 \cdot (b^2-1)} \cdot (b^3 - 1)$$ (1)

$$b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$$
$$b^3 - 1 = (b-1)(b^2+b+1)$$

$$= \frac{2 \cdot \cancel{(b-1)} \cdot (b^2+b+1)}{3 \cdot \cancel{(b-1)} \cdot (b+1)}$$

$$= \frac{2 \cdot (b^2+b+1)}{3 \cdot (b+1)}$$ (1)

5

(b) Stellen Sie das Integral auf für die Berechnung des Umfangs der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Integral nur aufstellen und möglichst vereinfachen, nicht ausrechnen.

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}$$ (1)

$$= b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$u = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{\quad}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot x\right) \right]^2} \cdot dx$$ (2)

$$= 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \frac{\frac{b^{\cancel{4}\,2}}{a^4} \cdot x^2}{\cancel{b^2} - \frac{\cancel{b^2}}{a^2} \cdot x^2}} \cdot dx$$

$$u = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2 \cdot x^2}{a^4 - a^2 \cdot x^2}} \cdot dx$$ (2)

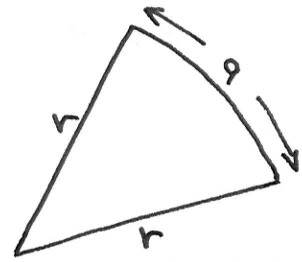
– bis hierhin ok, Fehler danach geben keinen Abzug !!!

5

Aufgabe 3 (5+4 Pt.)

Pt. 9

(a) Ein Kreissektor soll den Umfang $2 \cdot s$ haben. Wie ist der Radius zu wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird,?



$$2r + a = 2s$$

d.h. $a = 2s - 2r = 2 \cdot (s-r)$ (1)

$$A(r) = \pi r^2 \cdot \frac{a}{2\pi r} = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot (s-r) \cdot r}{2} = (s-r) \cdot r = sr - r^2$$ (3)

$$A'(r) = s - 2r \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r = \frac{s}{2}$$ (1)

$$A''(r) = -2$$

$$A''\left(\frac{s}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$ (1)

5

(b) Sie sollen auf einem einfachen Mikroprozessor, der nur die Grundrechenoperationen beherrscht, folgende Funktion implementieren. Die Größen x und l sind in der Nähe von Null, und Sie wissen außerdem, dass $l \ll x$ ist. Vereinfachen Sie die Formel mit Hilfe einer Taylor-Approximation. In FS nachschlagen erlaubt!

$$f(x,l) = \frac{4 \cdot (x^2 - 1) + 4 \cdot \cos(x)}{l \cdot (x^2 - l^2)^2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

(2)

also: $$f(x,l) \approx \frac{4x^2 - 4 + 4 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{l \cdot (x^2 \cancel{- l^2})^2}$$

(1) $l \ll x$

$$= \frac{4x^2 - 4 + 4 - 2x^2}{l \cdot x^4}$$

$$= \frac{2x^2}{l \cdot x^4}$$

$$= \frac{2}{l \cdot x^2}$$ (1)

4

Aufgabe 4 (2+2+2+1+4 Pt.)

11 Pt.

Ein Roboter in Systemtechnik I soll der Kurve $y = x^2$ $(x \geq 0)$ entlang fahren.

(a) Schreiben Sie diese Kurve als Kurve in Parameterdarstellung in Vektorschreibweise.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$$

2

(b) Ist Ihre Lösung von Teilaufgabe a die einzige Möglichkeit? Falls ja, warum? Falls nein, dann geben Sie eine andere Lösung, die Sie auch für richtig halten!

Nein, z.B. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$

2

(c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und die absolute Geschwindigkeit Ihres Roboters gemäß Teilaufgabe a.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + (2t)^2}$$

2

(d) Wie berechnen Sie mit Mathematica die Bogenlänge Ihrer Kurve von Teilaufgabe a für $0 \leq x \leq 5$?

x = t
y = t^2
Integrate[Sqrt[$\underbrace{\text{D[x,t]^2}}_{\text{ev. 1}}$ + D[y,t]^2], {t,0,5}]

Nur wenn 100% richtig: 1

(e) Das linke Rad des Roboters hat den Abstand 0.1 von der Mittellinie. Wie berechnen Sie mit Mathematica die Position des linken Rades?

Vorgehen: $\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ $\quad \vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|}$, dann $\vec{r}(t) + \frac{1}{10} \cdot \vec{N}(t)$

4