Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Analysis
Klasse 2d	12.5.2004
Serie 37	**Prüfung**

Name	Vorname	42 Pt. total	→	Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (3x4 Pt.) — 12 Pt.

(a) Mit Substitution zu lösen:

$$\int_0^3 \sqrt{6-2x}\,dx = -\int_6^0 \sqrt{u}\cdot\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_6^0$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 6^{3/2} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{6^3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\sqrt{6} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

$u = 6-2x$
$\frac{du}{dx} = -2$
$dx = -\frac{du}{2}$

(2) (1) (1) — 4

(b) $\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctan} x^2\right]_0^\infty$ (Regel aus FS angeben!)

(FS) $a=1$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\operatorname{arctan} b^2}_{\pi/2} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\operatorname{arctan} 0}_{0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

(1) (1) (1) (1) — 4

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$$\overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{1} = \underline{\underline{0}}$$

(2) (1) (1) — 4

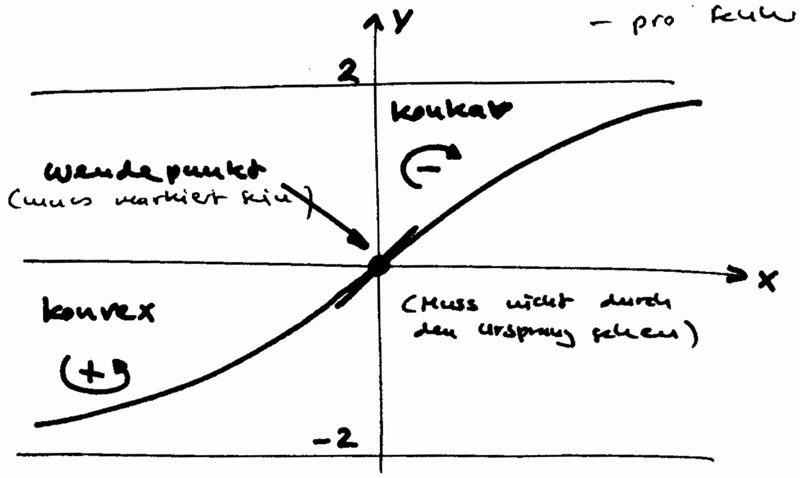
Aufgabe 2 (4+4+2 Pt.)

10 Pt.

(a) Skizzieren Sie den Grafen einer stetigen Funktion $f(\cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1 • $-2 < f(x) < 2$ für alle x
- 1 • $f'(0) = 1$
- • $f''(x) > 0$ für $x < 0$
- 1 • $f''(0) = 0$ — 1
- • $f''(x) < 0$ für $x > 0$

– pro Fehler 1 Pt. Abzug,



4

(b) Mit partieller Integration zu lösen:

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'}\, dx = e^x \cdot \sin x - \int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} \cdot dx \quad (1)$$

$$= e^x \cdot \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x) \cdot dx \right]$$

$$= e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx \quad (1)$$

also:

$$2 \cdot \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot (\sin x + \cos x) \quad (1)$$

somit Resultat $= \underline{\underline{\dfrac{e^x}{2} \cdot (\sin x + \cos x) + C}}$ (1) ⚠

mit $u = \cos x$
und $v' = e^x$: $\int = e^x \cdot \cos x - \int (-\sin x) \cdot e^x \cdot dx$

$= e^x \cdot \cos x + \int \underbrace{e^x}_{v'} \cdot \underbrace{\sin x}_{u} \cdot dx$

$=$ " $+ \left[e^x \cdot (\quad x) - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx \right]$

4

(c) Raten Sie eine Lösung folgender Differenzialgleichung: (Resultat genügt)

$$y^2 + \dot{y}^2 = 1$$

z.B. $y = \sin t$
$y = \cos t$
$y = 1$
$y = -1$

– nur richtig/falsch!

2

Aufgabe 3

10 Pt.

(a) Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) von $y = \frac{\ln x}{x}$. Maximum oder Minimum?

$$y' = \frac{1/x \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \overset{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 1 - \ln x = 0 \qquad \ln x = 1 \qquad \underline{\underline{x = e}} \quad (1)$$

$$y'' = \frac{-1/x \cdot x^2 - (1-\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + \ln x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-3 + 2 \cdot \ln x}{x^3} \quad (1)$$

$$y''(e) = \frac{-3 + 2 \cdot 1}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0 \quad (1) \quad \text{d.h. } \underline{\underline{\text{Maximum}}} \quad (1)$$

nur Pt. falls 100% sauber!

5

(b) Aus der Messreihe einer Zellkultur habe Sie mittels Newton-Interpolation folgendes Polynom erhalten:

$$p(t) \;=\; 2\,t^3 - 3\,t - 85$$

$p(t) = z$ bedeutet: nach t Minuten hat es z Zellen (Abweichung gegenüber Sollgröße).

Bestimmen Sie den Mittelwert der Anzahl Zellen über die ersten 10 Minuten.

$$\overline{p} = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (2t^3 - 3t - 85) \cdot dt \quad (1)\,(1)\,(1)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{t^4}{2} - 1.5t^2 - 85t \right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left[5000 - 150 - 850 \right]$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 4000 = \underline{\underline{400}} \quad (2)$$

5

Aufgabe 4 (5+5 Pt.)

10 Pt.

(a) Eine Parabel 3. Ordnung vom Typ $y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ geht mit der Steigung 45° durch den Koordinatenursprung und hat dort einen Wendepunkt; außerdem ist $y(1) = 2$. Bestimmen Sie aus diesen Funktionseigenschaften die vier Koeffizienten a, b, c und d.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y'' = 6ax + 2b$$

$$\left.\begin{array}{lll} y(0)=0 & : & d=0 \;(1) \\ y'(0)=1 & : & c=1 \;(1) \\ y''(0)=0 & : & b=0 \;(1) \end{array}\right\} \quad y = a\cdot x^3 + x$$

$$y(1) = 2 \;:\; 2 = a+1 \Rightarrow a=1 \;(1)$$

d.h. $y = x^3 + x$ (1)

5

(b) Folgende Messreihe liegt in Form einer Wertetabelle vor. Berechnen Sie das Interpolationspolynom mit der Methode von Lagrange (nicht Newton!). Bitte Resultat kontrollieren!

k	0	1	2
x_k	0	-1	1
y_k	2	1	1

$$L_0(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{1\cdot(-1)} = -(x^2-1) = 1-x^2$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^2-x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)\cdot(x+1)}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot(x^2+x)$$

$$y = 2\cdot(1-x^2) + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2-x) + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+x)$$
$$= 2 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$
$$y = 2 - x^2$$

Falsches Resultat, ohne Kontrolle: mind. −2 Pt.

5