Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Analysis
Klasse 2d	14.7.2004
Serie 48	**Prüfung**

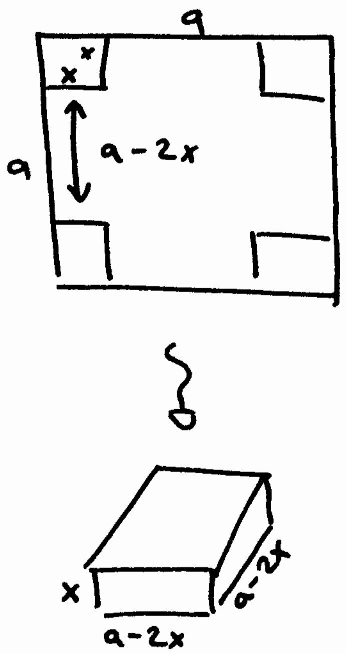
Name: ______ Vorname: ______ Pt. total: 40 → Note: ______

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (6 Pt.)

Pt. 6

Aus einem quadratischen Stück Blech mit Seitenlänge a soll eine offene Schachtel konstruiert werden. Zu diesem Zweck wird aus jeder Ecke des Blechs ein Quadrat mit Seitenlänge x herausgeschnitten und der Rest nach oben gefaltet. Wie groß ist x zu wählen, damit das Volumen V der Schachtel maximal wird? Bitte mit Nachweis, dass es sich um ein Maximum handelt!



$$V(x) = (a-2x)^2 \cdot x$$ 1

$$= (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x$$

$$= 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

$$V''(x) = 24x - 8a$$ 1

$$V'(x) = 0: \quad 12x^2 - 8ax + a^2 \stackrel{!}{=} 0$$ 1

$$x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2}}{2 \cdot 12}$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24} = \frac{2a \pm a}{6}$$

$$x_1 = \frac{a}{2} \qquad \underline{\underline{x_2 = \frac{a}{6}}}$$ 1

$$V = 0$$ 1

6

$$V''(a/6) = 24 \cdot a/6 - 8a = 4a - 8a$$

$$= -4a < 0$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\text{Maximum}}}$$ 1

Resultatkontrolle: $x = \dfrac{a}{6}$

Aufgabe 2 (2+1+2+3+1+2+2 Pt.)

13 Pt.

Bei dieser Aufgabe geht es um die Raumkurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Der Parameter t ist die Zeit.

(a) Berechnen Sie einen Tangentenvektor zum Zeitpunkt $t_0 = 1$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}(1) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

2

(b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt $t_0 = 1$.

Identisch zu Teilaufgabe a!

1

(c) Berechnen Sie die absolute Beschleunigung a zum Zeitpunkt $t_0 = 1$.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{(1)} \qquad a = |\ddot{\vec{r}}(1)| = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \text{(1)}$$

2

(d) Berechnen Sie die Krümmung κ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit der Formel: $\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$

$$K(t) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}\right|^3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}\right|^3} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8t^2+1}^3}$$

$$K(0) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{1}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

3

Folgende Teilaufgaben sind möglichst elegant mit Mathematica zu lösen.
Bitte alle Mma-Befehle genau so hinschreiben, wie Sie sie auf der Tastatur eintippen.

(e) Eingabe von $\vec{r}(t)$.

```
r = {t^2, t, t^2}
```

– nur genau so!

1

(f) Berechnung von Teilaufgabe b und Darstellung der Lösung als Vektor.

```
D[r,t] /. t->1 // MatrixForm
```

2

(g) Berechnung von Teilaufgabe c.

```
a = D[r,t,t] /. t->1
Sqrt[a.a]
```

(1) (1)

2

Aufgabe 3 (5+5 Pt.)

10 Pt.

(a) Approximieren Sie $f(x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$ durch ein quadratisches Polynom $p(x)$ mit bestmöglicher Übereinstimmung an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Taylorreihenentwicklung: im Punkt $\pi/4$ (1)

$f(x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$ | $f(\pi/4) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$f'(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin x$ | $f'(\pi/4) = -1$

$f''(x) = -\sqrt{2} \cdot \cos x$ (1) | $f''(\pi/4) = -1$ (1)

also:

$$p(x) = 1 - 1 \cdot (x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!} \cdot (x - \tfrac{\pi}{4})^2 \quad (1)$$

$$p(x) = 1 - (x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} \quad (1)$$

5

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $y = \frac{x^2}{2}$ für $-1 \leq x \leq 1$.

$$f'(x) = x$$

$$s = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \cdot dx \quad (2)$$

$$\stackrel{(116)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \left[x \sqrt{1+x^2} + \underbrace{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}_{\operatorname{arcsinh}(x)} \right]_0^1 \quad (1)$$

$$= \sqrt{2} + \overbrace{\ln(1+\sqrt{2})}^{\operatorname{arcsinh}(1)} \quad (2)$$

1 Pt. nur bei kleinem Fehler ...

ausrechn.: $\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \cdot \ln(-1+\sqrt{2})$

5

Aufgabe 4 (5+2+2+2 Pt.)

Pt. 11

(a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment einer Kugel mit Radius R und Dichte ρ bezüglich einer Achse, die durch den Kugelmittelpunkt geht.

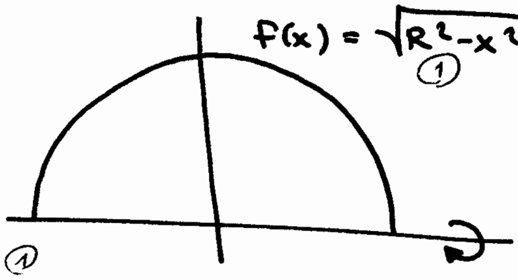
$$J_s = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \rho \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}^{\,4} \cdot dx \quad 1$$

$$= \pi \cdot \rho \int_0^R (R^2 - x^2)^2 \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \rho \int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) \cdot dx \quad 1$$

$$= \pi \cdot \rho \cdot \left[R^4 x - \frac{2R^2}{3} x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^R \quad 1$$

$$= \pi \cdot \rho \cdot \left(\underbrace{R^5}_{+15/15 \cdot R^5} - \underbrace{\frac{2}{3} R^5}_{-10/15 \cdot R^5} + \underbrace{\frac{1}{5} R^5}_{+3/15 \cdot R^5} \right)$$



$$\underline{\underline{J_s = \pi \cdot \rho \cdot \frac{8}{15} R^5}} \quad 1$$

5

(b) Ersetzen Sie in Ihrem Resultat von Teilaufgabe a die Dichte ρ durch die Masse m.

$$m = V \cdot \rho = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho \quad 1$$

$$J_s = \frac{8\pi}{15} \cdot R^5 \cdot \rho = \underbrace{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho}_{m} \cdot \frac{2}{5} \cdot R^2$$

$$\underline{\underline{J_s = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2}} \quad 1$$

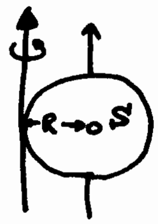
2

(ohne Folgefehler zu Teilaufgabe a)

(c) Wie groß wird das Massenträgheitsmoment der Kugel, wenn die Achse die Kugel berührt?

Satz v. Steiner:

2



$$\underline{\underline{J}} = J_s + m \cdot d^2 = \frac{2}{5} m R^2 + m R^2 = \underline{\underline{\frac{7}{5} \cdot m \cdot R^2}}$$

(ohne Folgefehler zu Teilaufgabe b)

(d) Mit welchem Mma-Befehl lösen Sie Teilaufgabe a? Nichts von Hand vorvereinfachen!

```
2 Pi/2 rho Integrate[Sqrt[R^2-x^2]^4, {x,0,R}]
```

2