Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Analysis
Klasse 1d	9.12.2004
Serie 12	**Prüfung**

Name | Vorname | 59 Pt. total → Note

30

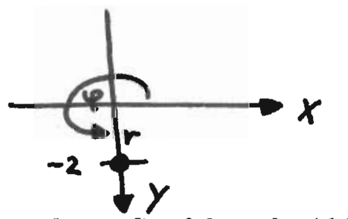
– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 80 Minuten.

Aufgabe 1 (2+3+3+3 Pt.)

Pt. 11

7

(a) Wie lauten die Polarkoordinaten des Punktes $(x; y) = (0; -2)$? (Winkel in Bogenmaß)



offensichtlich:

$r = 2$ (1) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (1)

2

(b) Berechnen Sie folgende Ableitungen:

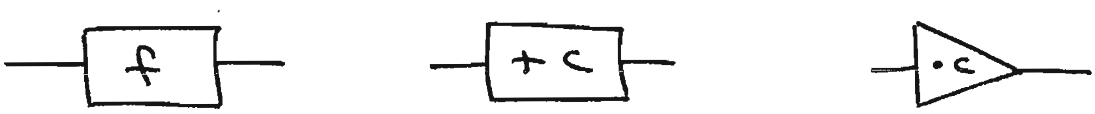
$(x^4)' = 4 \cdot x^3$ (1)

$(1/\sqrt[4]{x})' = \left(x^{-1/4}\right)' = -\frac{1}{4} \cdot x^{-5/4}$ (1) $= -\frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^5}}$

$(1/\sqrt{x^4})' = (1/x^2)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3}$ (1) $= -\frac{2}{x^3}$

3

(c) Sie haben Funktionsblöcke für die Funktion $f(\cdot)$, die Addition und die Multiplikation:



Zeichnen Sie mit diesen Blöcken das Blockdiagramm für: $y = 5 \cdot f(2x + 3)$

3

– 100% korrekt: 3 Pt.
– 1 Fehler: 2 Pt.
– relevante Ansätze: 1 Pt.

(d) Für die Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^n$ gilt: $f(1) = 0.5$ und $f(2) = 4$.
Berechnen Sie c und n.

$f(1) = 0.5$: $0.5 = c \cdot 1^n \Rightarrow c = 0.5$ (1)

$f(2) = 4$: $4 = 0.5 \cdot 2^n$ (1)

$2^n = 8 \Rightarrow n = 3$

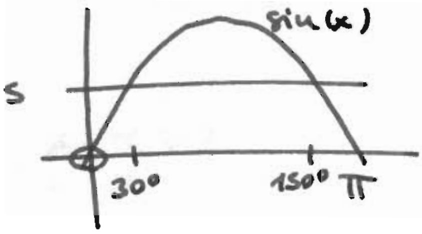
3

Aufgabe 2 (2+3+4+3 Pt.)

12 Pt.

7

(a) Ihr Kollege beschäftigt sich mit der Funktion $f(x) = \sin(x)$ für $0 \le x \le \pi$. Er möchte wissen, was $f^{-1}(0.5)$ ist und erhält mit dem TR den Wert $30°$. Was meinen Sie dazu?



sin(x) hat auf [0, π] keine Umkehrfunktion!

$f^{-1}(0.5)$ könnte auch $180° - 30° = 150°$ sein!

- "stimmt" oder keine eindeutige Antwort: 0 Pt.
- Erklärung dürftig: 1 Pt.

2

(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von: $y = (e^{-3x})^2 = e^{-6x}$

$y = e^{-6x}$ (1) $\mid \ln(\cdot)$

$\ln(y) = -6x$

$x = -\frac{1}{6} \cdot \ln(y)$

d.h. $\underline{\underline{y = -\frac{1}{6} \cdot \ln(x)}}$

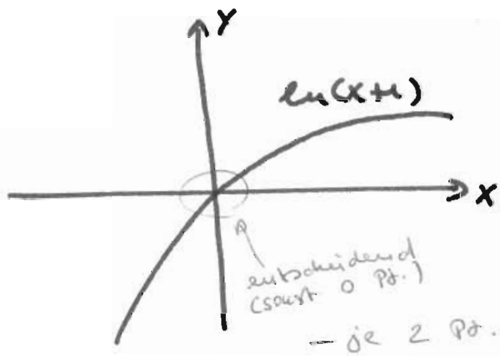
- nur genau so: 3 Pt.
- "–" im Nenner: –1 Pt.
- $x = f^{-1}(y)$: –1 Pt.
- $\ln(1/x)$: –1 Pt.
- $\ln(\sqrt{x})$: –1 Pt.

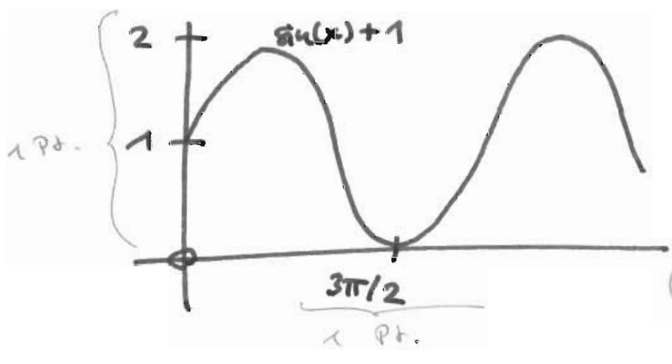
3

(c) Skizzieren Sie die folgenden beiden Funktionen: (Achsen mit Skalen beschriften)

$y = \ln(x+1)$ — ln(·) um 1 nach links

$y = \sin(x) + 1$ — sin(·) um 1 nach oben





4

(d) Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktion: $x \longmapsto \dfrac{x^2 - 16}{2x + 8}$

D: $x \neq -4$ (1)

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4$ (1)

$\underline{\underline{x = 4}}$ (1)

3

12 Pt.

6

Aufgabe 3 (3x4 Pt.)

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von: $f(x) = \sqrt{(x-4)\cdot(8-x)}$

$$(x-4)\cdot(8-x) \geq 0$$

$$\left|\begin{array}{l} x-4 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} x-4 \leq 0 \\ 8-x \leq 0 \end{array}\right|$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 8 \end{array}\right|}_{4 \leq x \leq 8} \qquad \underbrace{\left|\begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq 8 \end{array}\right|}_{\lightning}$$

$$D = [4,8]$$

– nur 1 Fall (100 %) korrekt: 2 Pt.
– nur 1 Fall, und der ansatz: 1 Pt.

4

(b) Eine Funktion ist durch die Parametergleichungen $x(t) = 2t - 4$, $y(t) = \ln(t-2) - t + 2$, definiert. Stellen Sie die Funktion explizit, d.h. in der Form $y = y(x)$ dar.

$x = 2t - 4$

$2t = x + 4$

$t = x/2 + 2$

einsetzen!

also:

$y(x) = \ln\left(\frac{x}{2} + 2 - 2\right) - \left(\frac{x}{2} + 2\right) + 2$ ②

$y(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}$

– pro Detailfehler 1 Pt. Abzug

4

(c) Gegeben ist eine Funktion in kartesischen Koordinaten in der impliziten Form:

$$(2xy)^2 - (y^2 + x^2)^2 = 0$$

Wie lautet die Funktionsgleichung in Polarkoordinaten?

$$\underbrace{(2\cdot r\cdot \cos\varphi \cdot r \cdot \sin\varphi)}_{r^2 \cdot \underbrace{2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}_{\sin(2\varphi)}}{}^2 - (\underbrace{r^2\cdot\cos^2\varphi + r^2\cdot\sin^2\varphi}_{r^2})^2 = 0$$ ① ① ①

d.h. $r^4 \cdot \sin^2(2\varphi) = r^4$

$\sin^2(2\varphi) = 1$ ①

$\sin(2\varphi) = \pm 1$

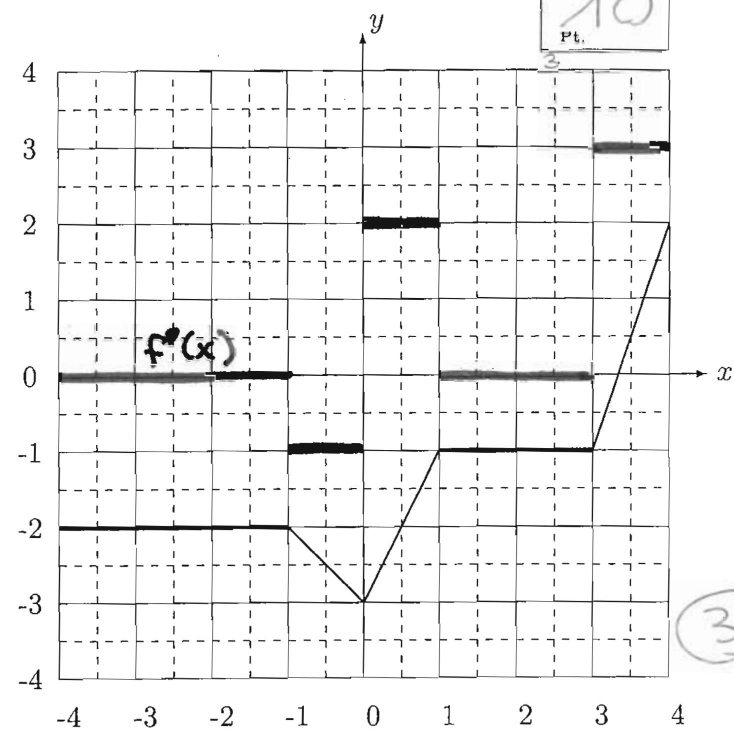
ohne zus. Pt.

4

10 Pt.

Aufgabe 4 (3+4+3 Pt.)

(a) In der nebenstehenden Grafik ist die Funktion $f(x)$ eingezeichnet. Skizzieren Sie in dasselbe Bild die Ableitung $f'(x)$.



— ein kleiner Fehler: 2 Pt.
— relevante Ansätze: 1 Pt.

3

(b) Berechnen Sie für die Funktion $y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$ den Differenzialquotienten. Berechnung von Grund auf mit Limes. Tipp: Bruch mit $\sqrt{4 + \Delta x} + 2$ erweitern.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ldots \frac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} \quad 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{4+\Delta x} + 2}{\sqrt{4+\Delta x} + 2} \quad 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4+\Delta x) - 4}{\Delta x \cdot (\sqrt{4+\Delta x} + 2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}} + 2} \quad 1$$

$$= \frac{1}{4} \quad 1$$

4

(c) Ein Objekt ist zum Zeitpunkt t an folgendem Ort: $s(t) = \sin(2\,t) + 2\,t$
Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v(t)$.

$$v = \dot{s} = \underbrace{2 \cdot \cos(2t)}_{1\text{ Pt.}} + \underbrace{2}_{1\text{ Pt.}}$$

wissen: Ableitung! 1 Pt.

3

Aufgabe 5 (7x2 Pt.)

Pt. 14

7

Folgende Aufgaben sind möglichst professionell mit MATLAB zu lösen.
Bitte Ihre Lösung genau so hinschreiben, wie Sie diese eintippen.

(a) Sie haben eine Weile mit MATLAB gearbeitet und wollen eine völlig neue Aufgabe beginnen. Welche beiden Befehle führen Sie aus, damit alles so ist, als hätten Sie MATLAB frisch gestartet, ohne jedoch MATLAB neu starten zu müssen?

```
>> clear all (1)
>> clc (1)
```

2

(b) Geben Sie in MATLAB folgende Zahlenwerte ein: 33 pF 1.2 MΩ

```
>> 33e-12 (1)
>> 1.2e6 (1)
```

2

(c) Wie können Sie in MATLAB die Zahl x auf zwei Stellen nach dem Komma runden?

```
>> round (x*100)/100
```

2

(d) Wie berechnen Sie in MATLAB die Polarkoordinaten des Punktes $(x; y) = (-80.5; -2.4)$? Ausgabe des Winkels φ in Bogenmaß.

```
>> r = sqrt(x^2 + y^2) (1)
>> phi = atan2(y,x) (1)
```

2

(e) Warum schreiben MATLAB-Spezialisten häufig x*x statt x^2?

x^2 wird über den Logarithmus berechnet: $x^2 = e^{\ln(x)\cdot 2}$
Das ist viel langsamer als $x \cdot x$ (nur eine Multiplikation)

2

(f) Berechnen Sie mit jeder Komponente x des MATLAB-Vektors v:

$$\frac{x^2 \cdot e^x \cdot 2}{\arctan(2 \cdot x)}$$

```
>> (v.^2.*exp(v)*2)./atan(2*v)
```

2

(g) Berechnen Sie mit jeder Komponente x des MATLAB-Vektors v:

$$\sqrt[3]{|x|}$$

```
>> abs(v).^(1/3)
```

2

(f)+(g): je Fehler −1 Pt.