Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy — Analysis

Klasse 2d — 19.5.2005

Serie 37 — Prüfung

Name	Vorname	82 Pt. total	$\longrightarrow$	Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 90 Minuten.

12 Pt.

Aufgabe 1 (4 x 3 Pt.)

(a) $$\int_1^e \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{1}{t}\cdot dt = \left[\ln t\right]_1^e \quad 1$$

$$= \underbrace{\ln(e)}_{1} - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \underline{\underline{1}} \quad 2$$

3

(b) $$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \cdot dx \quad 1$$

$$\overset{(287)}{=} \left[\tan(x) - x\right]_0^{\pi/4} \; 1 \quad = \underline{\underline{1-\frac{\pi}{4}}} \quad 1$$

3

(c) $$\int_0^4 \frac{1-u^{3/2}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - u\right)\cdot du \; 1 \quad = \left[2\sqrt{u} - \frac{u^2}{2}\right]_0^4 \quad 1$$

$$= (2\cdot 2 - 8) - 0 = \underline{\underline{-4}} \quad 1$$

3

(d) Mit Substitution zu lösen:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}\,dx = \int_1^0 \sqrt[3]{u}\cdot(-1)\cdot du = \int_0^1 \sqrt[3]{u}\cdot du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x \\ \frac{du}{dx} &= -1 \\ dx &= -du \end{aligned}} \quad 1$$

$$= \left[\frac{3}{4}\cdot u^{4/3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

3

Aufgabe 2 (4 x 3 + 5 Pt.)

17 Pt.

(a) Stellen Sie das Integral auf, ohne dieses zu berechnen:
Welchen Flächeninhalt schließt der Graf von $y = -0.25\,x^2 + 4$ mit der x-Achse ein?

Nullstellen der Parabel: $-0.25x^2+4=0$
$0.25x^2=4$
$x^2=16$
$x=\pm 4$

also: $\int_{-4}^{4} (-0.25x^2+4)\cdot dx$

3

(b) $\left(\sqrt{\sin 2x}\right)' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\sin 2x}} \cdot \cos(2x)\cdot 2$ 2

$= \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$ 1

3

(c) $\left(4^{x\cdot\ln x}\right)' = (\ln 4)\cdot 4^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$

$= (\ln 4)\cdot 4^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x+1)$

3

(d) Sie haben bereits $\int_1^4 f(x)\,dx = 3\pi$ berechnet. Bestimmen Sie hiermit:

$\int_5^1 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx = \int_4^1 f(x)\cdot dx = -\int_1^4 f(x)\cdot dx = -3\pi$

3

(e) Mit partieller Integration zu lösen:

$\int \underbrace{\arctan x}_{u} \cdot dx = \arctan(x)\cdot x - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot x\cdot dx$ 2

$v'=1$ 1

$= \arctan(x)\cdot x - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2} + C$ 2

5

12 Pt.

Aufgabe 3 (4×3 Pt.)

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx =$ ⚠ Pol bei $x=0$ ⚠

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^4}\cdot dx}_{\underbrace{\left[-\frac{1}{3}\cdot x^{-3}\right]_{-\infty}^{0}}_{\text{divergiert}}} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4}\cdot dx}_{\text{dito!}}$$

1

1

1

— "divergiert", aber ohne Begründung: 2 Pt.

3

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x-\pi\cdot\sin x} = \frac{1-1}{\frac{\pi}{2}-\pi\cdot 1} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{0}}$

3

⚠ auch nicht: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{-\cos x}{1-\pi\cos x} = \frac{0}{1-\pi} = \underline{\underline{0}}$ ⚠

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \text{"}\infty\cdot 0\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

1

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(1/x)\cdot(-1/x^2)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to\infty} \cos(1/x) = \underline{\underline{1}}$$

1 1

3

(d) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Wenn der lineare Mittelwert einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $a\leq x\leq b$ null ist, dann ist auch der quadratische Mittelwert null.

Falsch!

— "richtig": sicher 0 Pt.
— Beispiel muss nicht perfekt durchgerechnet sein!
— keine Antwort: 0 Pt.

Gegenbeispiele:

- $f(x) = \sin(x)$ für $0 \leq x \leq 2\pi$
- $f(x) = x$ für $-1 \leq x \leq 1$

3

Aufgabe 4 (5+6+4 Pt.)

15 Pt.

(a) Berechnen Sie die Wendepunkte von: $y = 12 + 2x^2 - x^4$ (vollständige Herleitung!)

$y' = 4x - 4x^3$

$y'' = 4 - 12x^2 \stackrel{!}{=} 0$

d.h. $12x^2 = 4$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (3)

$y''' = -24x$

$y'''\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0$

d.h. sind Wendepunkte! (2)

(5)

(b) Berechnen Sie die Extremalstellen von: $y = \sin^2 x$ (vollständige Herleitung!)

$y' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin(2x) \stackrel{!}{=} 0$

d.h. $2x = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x_k = k \cdot \frac{\pi}{2}$ (3)

$y'' = 2 \cdot \cos(2x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$

$y''(k \cdot \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \cos(k \cdot \pi)$ ist:

k gerade : > 0 : Minimum

k ungerade : < 0 : Maximum (3)

(6)

(c) Berechnen Sie die Asymptote von: $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$$(x^2 - 2x + 1) \div (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-4x}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{\begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 \end{array}}{-4x}$$

d.h. Asymptote : $y = 1$

(4)

Aufgabe 5 (4 + 5x2 Pt.) 14 Pt.

(a) Die Fallgeschwindigkeit v eines aus der Ruhe heraus frei fallenden Körpers hängt bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes wie folgt von der Fallzeit t ab:

$$v = v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right) \quad (t \geq 0)$$

Bestimmen Sie den Fallweg s als Funktion der Fallzeit t.

$$s(t) = \int v(t) \cdot dt$$

$$= \int v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right) \cdot dt$$

$$\overset{(387)}{=} v_E \cdot \frac{v_E}{g} \cdot \ln\left(\cosh\left(\frac{g}{v_E} \cdot t\right)\right) + C_1$$

4

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion add1(x), welche zu x eins dazuzählt:

```
>> add1(5)

   6
```

```
function res = add1(x)
res = x+1;
```

2

(c) Sie sehen, wie Ihr Kollege diesen Code eintippt. Wie erreichen die dasselbe mit weniger Aufwand?

```
>> for n = 1:0.1:2
       sqrt(n)
   end
```

```
>> sqrt(1:0.1:2)
```

2

(d) Wie lösen Sie mit Mathematica dieses Integral? $f = \int_1^5 (A \cdot e^x + A \cdot 2)\, dx$

```
f = Integrate[A Exp[x] + 2A , {x,1,5}]
```

2

(e) Wie lösen Sie mit Mathematica dieses Gleichungssystem? $\left| \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x &= y \end{aligned} \right|$

```
Solve[{x^2 + y^2 == 1, x==y}, {x,y}]
```

2

(f) Mathematica: Sie haben den Ausdruck a definiert, in dem als Variable nur x vorkommt. Sie wollen $x = \sqrt{2}$ in a einsetzen und den Ausdruck numerisch berechnen. In einer Zeile:

```
a /. x -> Sqrt[2] // N
```

2

Aufgabe 6 (6+2+2+2 Pt.)

12 Pt.

(a) Eine Messreihe liegt in Form einer Wertetabelle vor

k	0	1	2	3
x_k	−2	0	1	3
y_k	0	6	12	0

Berechnen Sie das Newton-Interpolationspolynom von Hand mit dem Differenzenschema.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_k & y_k & & & & & & \\
\hline
-2 & \underline{\underline{0}} & & & & & & \\
 & & > & \underline{\underline{3}} & & & & \\
0 & 6 & & & > & \underline{\underline{1}} & & \\
 & & > & 6 & & & > & \underline{\underline{-1}} \\
1 & 12 & & & > & -4 & & \\
 & & > & -6 & & & & \\
3 & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

2

$$y = 0 + 3\cdot(x+2) + 1\cdot\underbrace{(x+2)\cdot x}_{x^2+2x} - 1\cdot\underbrace{(x+2)\cdot x\cdot(x-1)}_{x^3+x^2-2x}$$

2

$$= 3x + 6 + x^2 + 2x - x^3 - x^2 + 2x$$

$$\underline{\underline{y = -x^3 + 7x + 6}}$$

2

– Rechenfehler am Ende + kein Kontrolle : – 2 Pt.

6

(b) Wie berechnen Sie mit MATLAB das gleiche Polynom so einfach wie möglich?

```
>> x = [-2 0 1 3]
>> y = [0 6 12 0]
>> polyfit (x, y, 3)
```

2

(c) Welches Resultat liefert Ihnen MATLAB in Teilaufgabe b ?

```
[-1 0 7 6]
```

– Folgefehler, vereinfacht : –1 Pt.

2

(d) Wie berechnen Sie mit MATLAB den Funktionswert an der Stelle $x = 2.4$ so einfach wie möglich?

```
>> p = polyfit (...)
>> polyval (p, 2.4)
```

– ohne polyval sicher 0 Pt. !

2