Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Analysis
Klasse 2d	13.7.2005
Serie 48	**Prüfung**

Name	Vorname	33 Pt. total	→	Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (4+4 Pt.)

Pt. 8

Gegeben ist die Raumkurve mit dem Ortsvektor $\vec{r}(t) = 2\cdot\cos(5\,t)\,\vec{e}_x + 2\cdot\sin(5\,t)\,\vec{e}_y + 10\,t\,\vec{e}_z$.

(a) Bestimmen Sie den Tangentenvektor für den Parameterwert $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(5t) \\ 2\cdot\sin(5t) \\ 10\cdot t \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -10\cdot\sin(5t) \\ 10\cdot\cos(5t) \\ 10 \end{pmatrix}$$ 2

$$\dot{\vec{r}}(\pi/4) = \begin{pmatrix} -10\cdot(-\sqrt{2}/2) \\ 10\cdot(-\sqrt{2}/2) \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 10 \end{pmatrix}}}$$ 2

4

(b) Bestimmen Sie den Hauptnormaleneinheitsvektor für einen beliebigen Parameterwert t.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -50\cdot\cos(5t) \\ -50\cdot\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\dot{\vec{r}}(t)| = 10\cdot\sqrt{2}$$

$$|\ddot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{50^2\cdot\cos^2(5t) + 50^2\cdot\sin^2(5t)} = 50$$

$$\vec{N} = \frac{\ddot{\vec{r}}(t)}{|\ddot{\vec{r}}(t)|} = \frac{1}{50}\cdot\begin{pmatrix} -50\cdot\cos(5t) \\ -50\cdot\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ -\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

– Punkte kontinuierlich 0–4 Pt.

4

Aufgabe 2 (8 Pt.)

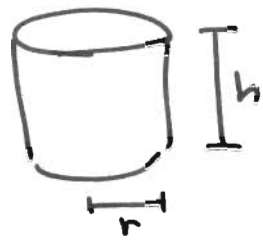
Pt. 8

Sie sollen aus Blech möglichst kostengünstige Konservenbüchsen herstellen. Die Büchsen haben Zylinderform und fassen $1000\,\text{cm}^3$. Das Blech für die Mantelflächen kostet $0.02\,\text{Rp/cm}^2$ und das Blech für die Grund- und Deckelflächen kostet $0.03\,\text{Rp/cm}^2$. Wie groß ist der Zylinderradius r zu wählen, damit die Materialkosten K minimal werden? Bitte Endresultat möglichst vereinfachen und mit Nachweis, dass es sich um ein Minimum handelt!

$$K(r) = 0.02 \cdot h \cdot 2\pi r + 0.03 \cdot 2 \cdot \pi r^2 \quad (1)$$

$$= 0.02 \cdot \frac{1000}{\pi r^2} \cdot 2\pi r + 0.03 \cdot 2 \cdot \pi r^2$$

$$= \frac{40}{r} + 0.06 \cdot \pi r^2 \quad (1)$$



$$V = \pi r^2 \cdot h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad (1)$$

$$K'(r) = -\frac{40}{r^2} + 0.12 \cdot \pi r \overset{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$\frac{40}{r^2} = 0.12 \cdot \pi r$$

$$r^3 = \frac{40}{0.12 \cdot \pi} = \frac{10}{0.03 \cdot \pi} = \frac{1000}{3 \cdot \pi} \quad (1)$$

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{3\pi}} \approx 4.7 \quad \underline{\underline{\checkmark}} \quad (1)$$

$$K''(r) = \frac{80}{r^3} + 0.12 \cdot \pi \quad (1)$$

$K''(4.7) > 0$, d.h. Minimum (1)

Hinweis: $K(4.7) \approx 13$ Rp

8

Numerische Resultatskontrolle: $r_{\min} \approx 4.7$

Aufgabe 3 (4 + 3 Pt.)

Pt. 7

(a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylor-Reihe. (Drei Glieder, Rechnung vollständig von Hand, ohne FS)

$$f(x) = x^{1/2} \qquad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \qquad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/2} \quad (1) \qquad f''(1) = -\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\sqrt{x} \approx f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2$$

$$\approx \underline{\underline{1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{8} \cdot (x-1)^2}} \quad (2)$$

4

(b) Berechnen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $2 \leq x \leq 4$ um die x-Achse entsteht.

$$V = \pi \cdot \int_2^4 \sqrt{x^2 - 4}^{\,2} \cdot dx \quad (1)$$

$$= \pi \cdot \int_2^4 (x^2 - 4) \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 \quad (1)$$

$$= \pi \cdot \left[\left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{56}{3} - 8 \right]$$

$$= \underline{\underline{\pi \cdot \frac{32}{3}}} \quad (1)$$

3

Aufgabe 4 (3 + 3 + 4 Pt.)

10 Pt.

Stellen Sie jeweils das Integral auf und vereinfachen Sie es – Integral jedoch nicht ausrechnen:

(a) Bogenlänge der Kurve $y = 4.2 \cdot \ln x^3$ im Intervall von $x = 1$ bis $x = e$.

$$y' = 4.2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{12.6}{x}$$

– 100% korrekt: 3 Pt.
– kleinerer Fehler: 2 Pt.
– größerer Fehler, Rest stimmt: 1 Pt.

$$s = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{12.6}{x}\right)^2} \cdot dx$$

3

(b) Mantelfläche der $\sqrt{\cdot}$ - Kurve für $0 \le x \le 4$ bei Rotation um die y-Achse. (y-Achse!)

entspricht: $f(x) = x^2$ für $0 \le x \le 2$

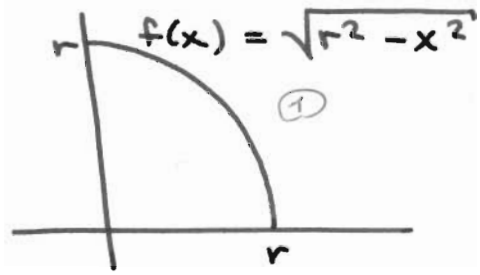
$f'(x) = 2x$

– Bewertung wie in Teilaufgabe (a) ...

$$M = 2\pi \int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx$$

3

(c) Flächenschwerpunkt des Viertelkreises im 1. Quadranten mit Radius r.



$x_s = y_s$ 1

y_s ist einfacher:

$$A = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$y_s = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi r^2}{4}} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} \cdot dx$$

$$y_s = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r (r^2 - x^2) \cdot dx$$ 2

4

variante x_s: – 1 Pt.

$$x_s = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$