Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Lineare Algebra
Klasse 1d	10.1.2003
Serie 14	**Test**

Name	Vorname	38 Pt. total	→	Note

- Lösungen ohne verständliche Herleitung geben keine Punkte.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 75 Minuten.

Aufgabe 1 (6 Pt.)

Pt. 6

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Gauß-Elimination: (Lösung in Vektorschreibweise)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 14 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ -2 \end{array}$$

(1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \div 2 \\ -1 \end{array}$$

verstanden: (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rre-Form: (1)

$$\underbrace{x_1 \quad x_2 = \lambda \quad x_3 \quad x_4 = \mu}_{(1)}$$

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda &= 2 \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 + 2\mu &= 5 \\ x_4 &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \lambda \\ x_2 &= 0 + \lambda \\ x_3 &= 5 \quad -2\mu \\ x_4 &= 0 \quad +\mu \end{aligned}$$

(1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1)

6

Haben Sie Ihre Lösung kontrolliert?

Aufgabe 2 (4+4+3 Pt.)

11 Pt.

(a) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\left| \begin{array}{l} 6 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 9 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{array} \right| \quad 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -2 \quad 1$$

also: $$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}} \quad 1$$

4

(b) Zerlegen Sie $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in eine zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrechte Komponente.

$$\vec{a_b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \underbrace{\frac{-5}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{alle Rillen korrekt berechnet: } 1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

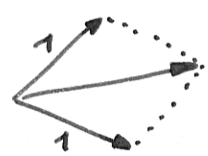
Idee: 1

$$\vec{a_{b\perp}} = \vec{a} - \vec{a_b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 5 \end{pmatrix}}} \quad 1$$

4

(c) Sie haben zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wie können Sie die Richtung der Winkelhalbierenden zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen? Beschreiben Sie ein Verfahren in Stichworten.

Vektoren normieren und addieren gibt Richtung der Winkelhalbierenden:



also: $$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

3

Aufgabe 3 (4+3+2+2 Pt.) 11 Pt.

(a) Die Gerade h geht durch die Punkte $(4;0;1)$ und $(4;-1;-2)$, und die Ebene E hat die Koordinatengleichung $-2x + y - 2z = 0$. Berechnen Sie den Schnittpunkt von h mit E.

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\lambda \\ 1-3\lambda \end{pmatrix} \quad 1$$

In E einsetzen: $-2 \cdot (4) + (-\lambda) - 2 \cdot (1-3\lambda) = 0$ 1

$$-8 - \lambda - 2 + 6\lambda = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = 2 \quad 1$$

also Schnittpunkt: $\underline{\underline{(4;-2;-5)}}$ 1

4

(b) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene $-2x + y - 2z = 0$ mit der yz-Ebene.

yz-Ebene: $x = 0$ 1

bleibt: $y - 2z = 0$

$\underline{\underline{y = 2z}}$

– alternativ: $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

3

(c) Stimmt folgende Rechnung? (kurze Begründung)

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = \lambda \cdot |\vec{a}|$$

– "ja": 0 Pt.
– 2 Pt: entweder Gegenbeispiel oder korrekte Form!

Nein (falls λ negativ)!

Korrekt wäre: $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

2

(d) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\underbrace{\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] + \left[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}\right]}_{0 \quad 1} + \underbrace{\left[\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c}\right]}_{0 \quad 1}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

2

$\boxed{10}$ Pt.

Aufgabe 4 (5x2 Pt.)

(a) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen, das keine Lösung hat? Wenn nein, warum? Wenn ja, dann möglichst einfaches System angeben!

z.B. $\left| \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array} \right|$

– falsch : 0 Pt.
– "geht nicht" : 0 Pt.
– nicht einfach, aber korrekt : 1 Pt.

2

(b) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Variablen, das ∞-viele Lösung hat? Wenn nein, warum? Wenn ja, dann möglichst einfaches System angeben!

z.B. $\left| \begin{array}{l} x=0 \\ x=0 \end{array} \right|$

2

(c) $(\tan x + \cot x) \cdot \sin(2x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = \underline{\underline{2}}$

2

(d) $\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\alpha$
$+ \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha \underbrace{- \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\alpha}_{0}$

2

$= 2 \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}/2} \cdot \cos\alpha$ 1 $= \underline{\underline{\sqrt{3} \cdot \cos\alpha}}$

(e) $\sqrt{1-\cos(x)} \cdot \sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x}$ 1 $= \underline{\underline{|\sin x|}}$

– $\pm \sin x$ nur akzeptiert!

2