Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Lineare Algebra
Klasse 2d	3.7.2003

Serie 43 — Test

Name	Vorname	37 Pt. total	→	Note

– Lösungen ohne verständliche Herleitung geben keine Punkte.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 60 Minuten.

Aufgabe 1 (4x3 Pt.) — 12 Pt.

(a) Für welche Werte der Parameter a, b, c ist folgende Matrix regulär?

$$\begin{pmatrix} 1 & c & c \\ 0 & a & a-c \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & c \\ 0 & a \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

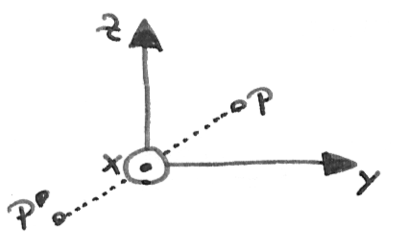
$$\det(\cdot) = a \cdot (a-b) \overset{!}{\neq} 0$$ (2) (oder sauber mit Rang)

– $a-b \neq 0$: -1 Pt.
– nicht klar und / oder: -1 Pt.

also: $\underline{\underline{a \neq 0 \text{ und } a \neq b}}$

(3)

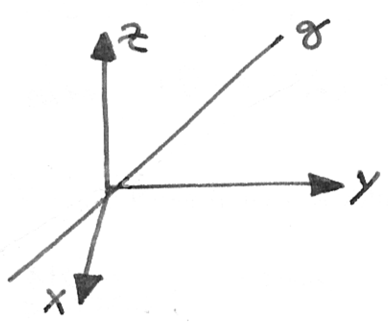
(b) Bestimmen Sie die Abbildungs-Matrix für die Spiegelung an der x-Achse im Raum.



d.h. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

(3)

(c) Bestimmen Sie die Abbildungs-Matrix für die Spiegelung an der Geraden $x = 0$, $y = z$.



d.h. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix}$

(3)

(d) Was bedeutet folgende Abbildungs-Matrix geometrisch?

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\text{Rotation um den Ursprung um } +\pi/4}}$

– ohne Ursprung: -1 Pt.

(3)

- ohne Antwort: 0 Pt.
- Ja/Nein falsch: 0 Pt.
- Ohne / falsche Begründung: 0 Pt.
- Mangelhaft aber korrekte Begründung: 1 Pt.

Aufgabe 2 (7x2 Pt.)

14 Pt.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Einfache und saubere Begründung!

(a) Die Abbildung $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \max(x_1, x_2)$ ist linear.

Nein, denn z.B.

$$\left.\begin{aligned} (-1)\cdot f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= (-1)\cdot 1 = -1 \\ f\left((-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 0 \end{aligned}\right\} \neq$$

2

(b) Die Abbildung $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\cdot(x_2+x_3) + 0\cdot x_1$ ist linear.

Ja, denn $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3$

2

(c) $2x + 3 = z$ ist im Raum eine Gerade durch den Ursprung.

Nein, denn im Raum ist jede lineare Gleichung eine Ebene, außerdem nicht durch den Ursprung!

2

- Für 2 Pt. muss beides angegeben werden!

(d) Wenn die Matrix B orthogonal ist, dann darf man rechnen:

$$(A\cdot B)^T \cdot B = A^T \cdot B^T \cdot B = A^T \cdot B^{-1} \cdot B = A^T$$

Nein, $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ (Rest wäre richtig)

2

(e) Wenn f und g lineare Abbildungen sind, dann ist auch $f\circ g$ linear.

$f(x) = A\cdot x$, $g(x) = B\cdot x$, Ja, denn:

also: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(B\cdot x) = \underbrace{A\cdot B}\cdot x$

auch Matrix, also linear!

2

(f) Wenn g keine lineare Abbildungen ist, dann ist sicher auch $f\circ g$ nicht linear.

Nein, denn wenn z.B. $f(x) = 0$, dann ist

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 0$, also offensichtlich linear!

2

(g) Die Nullmatrix invertiert ergibt wieder die Nullmatrix.

Nein, denn die Nullmatrix lässt sich gar nicht invertieren!

2

Aufgabe 3 (3+3+5 Pt.)

11 Pt.

(a) Gegeben ist die folgende Messreihe:

x	1.0	2.0	3.0	5.0	7.0
y	6.0	2.0	1.2	4.1	6.8

Sie vermuten einen Zusammenhang der Form $y = a \cdot x + \frac{b}{x} + c$.

Stellen Sie das Gleichungssystem für die Ausgleichsrechnung in Matrixschreibweise auf.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/1 & 1 \\ 2 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1/3 & 1 \\ 5 & 1/5 & 1 \\ 7 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.0 \\ 2.0 \\ 1.2 \\ 4.1 \\ 6.8 \end{pmatrix}$$

- 100% richtig: 3 Pt.
- pro Fehler 1 Pt. Abzug.
- Ansätze: 1 Pt.
- nicht Gl.-Sys. in Matrix-schreibweise: -1 Pt.

3

(b) Wie berechnen Sie mit dem MATLAB "\\" - Befehl die optimalen Parameter a, b und c?

```
>> A = [1 1/1 1; 2 1/2 1; .... ; 7 1/7 1];
>> b = [6.0 2.0 ... 6.8]';
>> p = A\b;
>> a=p(1), b=p(2), c=p(3)
```

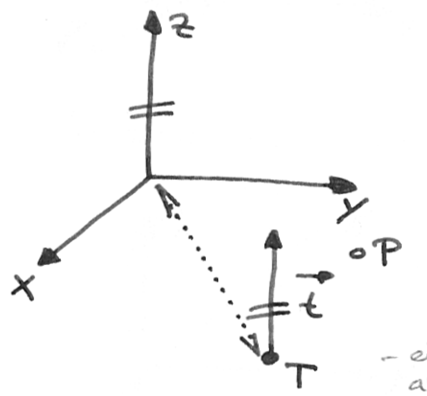
das geht natürlich auch noch eleganter ☺ !

Fehlt: -1 Pt.

ansonsten: Bewertung wie bei Teilaufgabe a!

3

(c) Wie rotieren Sie den Punkt $P = (7; 3; -2)$ um $\varphi = +35°$ um die Gerade, die durch den Punkt $T = (3; 4; 0)$ geht und den Richtungsvektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat? Lösungsskizze und MATLAB-Code, der die Rechnung ausführt, angeben.



Lösung:

(1) Translation Gerade auf z-Achse

(2) Rotation um z-Achse

(3) Rücktranslation

Korrekte Idee: 2

- einfach "stupid" Lösung vom Übungsblatt abzuschreiben: 0 Pt.

```
>> P = [7 3 -2]';
>> T = [3 4 0]';
>> phi = 35/180 *pi;
>> A = [cos(phi)  -sin(phi)  0
        sin(phi)   cos(phi)  0
        0          0         1 ];
>> A*(P-T)+T
```

Ausführungs-Details = 3 Pt.

5