Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Lineare Algebra
Klasse 1d	7.1.2004
Serie 13	**Test**

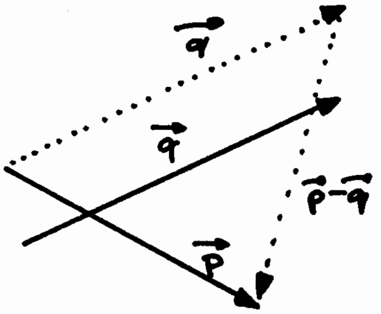
Name	Vorname	52 Pt. total	→	Note

- Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 75 Minuten.

Aufgabe 1 (1+2+2+2+2+1+2 Pt.)

12 Pt.

(a) Zeichnen Sie $\vec{p} - \vec{q}$ ein:



– nur 100% richtig / falsch!

1

Sind (b) – (e) gültige Rechengesetze? Mit sauberer Begründung!

– ohne Antwort ja/nein: 0 Pt.
– falsche Antwort ja/nein: 0 Pt.
– Antwort korrekt, aber Begründung unsauber: –1 Pt.
– ohne Begründung: 0 Pt.

(b) $\left|\frac{\vec{a}}{\lambda}\right| = \frac{|\vec{a}|}{\lambda}$

Nein, richtig wäre $\left|\frac{\vec{a}}{\lambda}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\lambda|}$

Gilt nur für $\lambda > 0$!

2

(c) $\underbrace{(\vec{a}+\vec{b}) \times \underbrace{(\vec{b}+\vec{a})}_{\vec{a}+\vec{b}}}_{\vec{0}} = \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}}$

Stimmt!

2

(d) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}} = \vec{b}$

Division durch Vektor gibt es nicht: Nein

2

(e) $\underbrace{\vec{a} \times (2\vec{b} - 2\vec{b})}_{\text{Vektor}} = \underbrace{0}_{\text{Skalar}}$

Nein

2

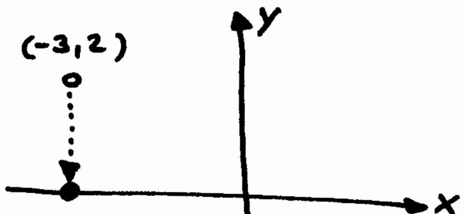
(f) Wie heißt das Rechengesetz, welches $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ besagt? Kommutativgesetz

genau so? 1 Pt.

1

(g) Wie lautet die Projektion des Punktes $(-3; 2)$ auf die x-Achse? Mit Skizze!

– $(-3;0)$: 1 Pt.
– ohne Skizze: 1 Pt.
– nur Skizze: 1 Pt.



Projektion: $x = -3$

2

Aufgabe 2 (2+4+3 Pt.)

Pt. 9

(a) Wie lautet der Einheitsvektor in Richtung von $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$?

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53} \qquad \text{also: } \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{53}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}}}$$

2

– einzige Möglichkeit für Punktabzug: Rechenfehler oder grobe Unsauberkeit : 1 Pt.
weglassen : 0 Pt.

(b) Ist es möglich, $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu schreiben? Falls ja, wie?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c} : \quad \left| \begin{array}{l} 1 = \lambda + \mu \\ -7 = 3\lambda + 5\mu \\ 9 = \lambda + 5\mu \end{array} \right| \ (1)$$

Alternativ:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 15+45-7 \\ -27-5+35 \end{matrix} = 56 \neq 0$$

I & II ergeben: $\mu = -5$, $\lambda = 6$: Einsetzen in III : ↯
I & III ergeben: $\mu = 2$, $\lambda = -1$ (1) : Einsetzen in II : ↯ (1)
> Alternativen!

4

D.h. es ist $\underline{\underline{\text{nicht möglich!}}}$ (1)

(c) Kontrollieren Sie möglichst einfach, ob folgende vier Punkte in einer Ebene liegen:

A = (0; 1; 0) B = (3; 1; 2) C = (1; 2; 3) D = (3; 0; 2)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (1)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} = \begin{matrix} 6-2 \\ -6+9 \end{matrix} = 7 \neq 0 \ (1) \qquad \text{d.h. } \underline{\underline{\text{Nein}}} \ (1)$$

– – – + + +

3

– mit Ansatz Gl.-Sys.: max 2 Pt.

Aufgabe 3 (5 Pt.)

Pt. 5

Wo ist der Punkt $P = (x; y; z)$ auf der x-Achse zu wählen, damit das Dreieck PQR die Fläche 2.5 hat? $Q = (5; 4; 3)$ $R = (5; 4; 4)$

$P = (x; 0; 0)$ ①

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(noch bequemer: $\overrightarrow{QR}$)

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5-x \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} ① = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \cdot (5-x) - 4 \cdot (5-x) \\ 4 \cdot (5-x) - 4 \cdot (5-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ x-5 \\ 0 \end{pmatrix} ①$$

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (x-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 41}}{2} \overset{!}{=} 2.5$$

also: $x^2 - 10x + 41 = 25$ ①

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{x_1 = 8}} \\ \underline{\underline{x_2 = 2}} \end{array}\right\} P = (x; 0; 0)$$

①

5

Aufgabe 4 (3+5x2 Pt.)

13 Pt.

(a) Finden Sie die Koordinatengleichung (Normalenform) der Ebene, die durch den Punkt $(5; -2; 4)$ geht und parallel zur Ebene $3x + y - 6z + 8 = 0$ ist.

Parallele Ebenen haben denselben Normalenvektor.

also : $3x + y - 6z = \boxed{////}$

$(5; -2; 4)$ einsetzen: $3x + y - 6z = -11$

3

– pro Fehler: – 1 Pt.
– Schreibweise unsauber: – 1 Pt.

(b) Wo liegt der Schwerpunkt S des Dreiecks mit den Ecken $(1; 2; 3)$, $(4; 5; 6)$ und $(7; 5; 3)$?

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{①} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2

somit : $S = (4; 4; 4)$ ① ← als Punkt, nicht als Vektor!

(c) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} - \cos x \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = -\cos x$

(oder mit Koordinatentransformation)

2

(d) $\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

2

(e) $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha \cdot (\sin^2\alpha - 1)$

$= -\cos\alpha \cdot \underbrace{(1 - \sin^2\alpha)}_{\cos^2\alpha} = -\cos^3\alpha$

2

(f) Als Produkt schreiben und vereinfachen:

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 2 \cdot \underbrace{\cos\Big(\underbrace{\frac{x + \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3}}{2}}_{x}\Big) \cdot \cos\Big(\underbrace{\frac{x + \frac{\pi}{3} - x + \frac{\pi}{3}}{2}}_{\pi/3}\Big)}_{1/2}$$

– nur Pt., falls in Prod. umgewandelt!

$= \cos x$

2

Aufgabe 5 (2+2+1+1+ 2+1+2+2 Pt.)

13 Pt.

Lösen Sie folgende Aufgaben möglichst einfach und elegant mit MATLAB:

(a) Skizzieren Sie die Funktion
$y(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.

Hat bei x = 0 keinen Pol !!!

>> x = linspace (-pi, pi);
>> y = sin (x.^2)./x ;
>> plot (x, y)

2

(b) Wie setzen Sie in (a) den y-Achsenbereich auf $-5 \leq y \leq 5$?

einfach : >> axis ([-pi pi -5 5]) ①
elegant : >> ylim ([-5 5]) ②

2

(c) Berechnen Sie die Eulersche Konstante e.

>> exp(1)

1

(d) Was antwortet MATLAB, wenn Sie "1:0.4:2" eintippen?

1.00 1.40 1.80

1

(e) Wie skizzieren Sie mit möglichst wenig Datenpunkten die Gerade $y = 3 \cdot x$ für $-2 \leq x \leq 4$?

>> x = [-2 4];
>> y = 3*x;
>> plot (x, y)

2

(f) Sie haben mit MATLAB den Grafen von $y = \sin x$ ausgedruckt. Sie messen bei $x = 0$ eine Tangentensteigung von 39°, es sollten aber 45° sein. Mit welchem MATLAB-Befehl korrigieren Sie dies?

>> axis equal

1

(g) Skizzieren Sie den Grafen von $y(x) = \frac{1}{x-1}$ für $-4 \leq x \leq 4$. Der Graf soll rot sein.

Pol bei x = 1
- ohne Pol : 0 Pt.

>> x1 = linspace (-4, 0.9);
>> x2 = linspace (1.1, 4);
>> y1 = 1./(x1 - 1);
>> y2 = 1./(x2 - 1);
>> plot (x1, y1, 'r', x2, y2, 'r')

2

(h) Sie haben mit ">> x = ...", ">> y = ...", ">> plot(x,y)" einen Grafen skizziert. Wie finden Sie den maximalen Funktionswert $y_{\max}$, und wie finden Sie die Stelle $x_{\max}$ des maximalen Funktionswerts?

nur ymax :
>> ymax = max(y)

beide :
>> [ymax index] = max(y)
>> xmax = x(index)

2