Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Lineare Algebra
Klasse 1d	5.1.2005
Serie 13	**Test**

Name	Vorname	52 Pt. total	→	Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (4+4+3 Pt.)

11 Pt.

Die Gerade h geht durch die Punkte $(4;0;1)$ und $(4;-1;-2)$,
und die Ebene E hat die Koordinatengleichung $-2x + y - 2z = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Projektion von h auf die xz-Ebene.

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\lambda \\ 1-3\lambda \end{pmatrix} \quad 1$$

xz-Ebene: y egal !

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1-3\lambda \end{pmatrix} \quad 1$$

λ eliminieren: $\underline{\underline{x = 4}}$ 2 $\quad (z = 1 - 3\lambda \in \mathbb{R})$

4

(b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von h mit E.

Einsetzen:

$$-2 \cdot (4) + (-\lambda) - 2 \cdot (1 - 3\lambda) = 0 \quad 2$$
$$-8 - \lambda - 2 + 6\lambda = 0$$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}$ 1

4

also Schnittpunkt = $\underline{\underline{(4;-2;-5)}}$ 1

(kein Pt.-Abzug für Ortsvektor)

(c) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Schnittgerade von E mit der yz-Ebene.

yz-Ebene: $x = 0$

$y - 2z = 0$, oder $\underline{\underline{y = 2z}}$

3

Aufgabe 2 (2+3+4 Pt.)

Pt. 9

(a) Berechnen Sie: $\dfrac{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}{(x-y)} = \dfrac{x^2-y^2}{(x-y)}$ (1) $= \underline{\underline{x+y}}$ (1)

2

(b) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\underbrace{\vec{a}^3 + 3\cdot(\vec{a}^2 \times \vec{b}) + 3\cdot(\vec{a}\times\vec{b}^2) + \vec{b}^3}_{\text{macht keinen Sinn!}} = \underbrace{\underbrace{(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}+\vec{b})}_{\substack{\text{wie geklammert?} \\ \text{nicht assoziativ!}}}}_{\text{macht keinen Sinn!}}$$

skalar

3

– keine eindeutige Antwort : 0 Pt.
– relevante Ansätze : 1 Pt.
– korrekt aber mangelhafte Erklärung : 2 Pt.
– 100 % korrekte Erklärung : 3 Pt.

(c) Berechnen Sie die Ebene (Normalenform), die von den Punkten $(-1; -4; -2)$ und $(0; -2; 2)$ den gleichen Abstand hat.

Punkt in der Mitte : $(-0.5\,;\ -3\,;\ 0)$ (1)

Richtungsvektor (Normalenvektor) : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (1)

also: $1\cdot x + 2\cdot y + 4\cdot z =$ (1)

Punkt einsetzen: $1\cdot(-0.5) + 2\cdot(-3) + 4\cdot 0 = -6.5$

also: $\underline{\underline{x + 2y + 4z = -6.5}}$ (1)

4

Pt. 7

Aufgabe 3 (4+3 Pt.)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ x \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie x so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear abhängig sind.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} &= 24 - 6x + 10 \\ &\quad -15 - 4x + 24 \\ &= -10x + 43 \quad 2 \end{aligned}$$

$$- - - + + +$$

$$-10x + 43 \overset{!}{=} 0 \quad 1$$

$$10x = 43$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{43}{10} = \underline{\underline{4.3}} \quad 1$$

Variante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & x & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} &24 + 10 - 6x \\ &= -15 - 4x + 24 \end{aligned} \quad = -10x + 43$$

4

(b) Mit welchen MATLAB-Befehlen kontrollieren Sie Ihr Resultat von Teilaufgabe a?

```
>> A = [4 2 3; -2 1 1; 5 4.3 6]
>> det(A)   ——> muss Null geben!
```

3

— 100% richtig: 3 Pt.
— kleiner Fehler/Unsicherheit: 2 Pt.
— relevante Ansätze: 1 Pt.

Aufgabe 4 (2+3+2+4 Pt.)

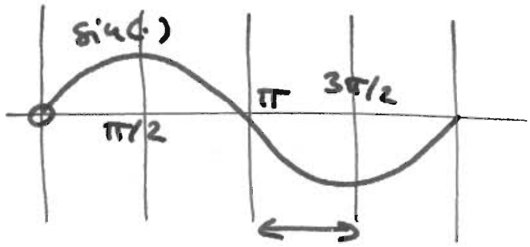
11 Pt.

(a) $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1}$

$= \underline{\underline{\cos\alpha}}$

2

(b) Bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ aus $\cos(\alpha)$, wenn $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$.



$\underline{\underline{\sin\alpha = - \sqrt{1-\cos^2\alpha}}}$

falsch oder ±: 1 Pt.

Denn $\sin\alpha$ ist negativ im Bereich $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$

3

$-\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$: 1 Pt.

(c) Berechnen Sie folgende Determinante: (solch eine Matrix heisst *Rotationsmatrix*)

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \underline{\underline{1}}$$

2

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen: $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d.h. $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, oder

$\frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

1

also: $\boxed{x = \pi + k \cdot 6\pi}$, oder

2

$x = 2\pi + k \cdot 6\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2

Für 4 Pt. diese Form!

4

Korrekte Aufzählung: 3 Pt.

Eine Lösung gefunden: 1 Pt.

14 Pt.

Aufgabe 5 (3+2+2+1+1+3+2 Pt.)

Lösen Sie folgende Aufgaben möglichst einfach und elegant mit MATLAB:

(a) Skizzieren Sie die Funktion $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^7+1}}$ für $-6 \le t \le 6$.

```
>> t = linspace (-6,6);
>> x = 1./ sqrt (t.^7+1);
>> plot (t,x)
```

3

(b) Erzeugen Sie einen Vektor von 70 aufsteigenden Werten zwischen e (Eulersche Konstante) und 3.

```
>> linspace (exp(1),3,70)
```

2

(c) Zeichnen Sie ein rotes Quadrat.

```
>> plot ([0 1 1 0 0], [0 0 1 1 0], 'r')
```

2

(d) Was antwortet MATLAB, wenn Sie "9:-2:0" eintippen?

[9 7 5 3 1]

1

(e) Was antwortet MATLAB, wenn Sie "9:2:0" eintippen?

[ ] (leerer Vektor)

1

(f) Skizzieren Sie den Grafen von $y = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 6$ und markieren Sie die Nullstelle bei $x = 3$.

```
>> x = linspace (-7,7);
>> y = 2* x.^3 - 4* x.^2 - 8*x+6;
>> y = polyval ([2 -4 -8 6], x);
>> plot (x, y, 3, 0, 'o')
```

einfacher

besser

3

(g) Skizzieren Sie die Grafen vom Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus in einer Grafik mit nur 2 Zeilen Code.

```
>> x = linspace (-2,2);
>> plot (x, [sinh(x); cosh(x)])
```

2