Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Lineare Algebra
Klasse 2d	13.4.2005
Serie 29	**Test**

Name | Vorname | Pt. total: 50 → Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 80 Minuten.

Aufgabe 1 (5+3 Pt.)

Pt. 8

(a) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Gauß-Elimination:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 7 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 6 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ +2 \end{array}$$

(1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -1$$

$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \uparrow\ x_1 \quad \uparrow\ \lambda \quad \uparrow\ x_3 \quad \uparrow\ \mu \end{array}$$

(2)

rre-Form 1 Fehler Rechnen

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda + 2\mu &= 1 \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 + 2\mu &= 3 \\ x_4 &= \mu \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1)

5

(b) Erklären Sie in Stichworten, wie Sie am besten Ihre Lösung von Teilaufgabe a kontrollieren.

Ideal: 3x eine Lösung einsetzen, z.B.:

$\lambda = 0,\ \mu = 0$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1,\ \mu = 0$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0,\ \mu = 1$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

– tadelloses Verfahren + Erklärung: 3 Pt.
– etwas unklar / kleine Fehler: 2 Pt.
– relevanter Beitrag: 1 Pt.

3

13 Pt.

Aufgabe 2 (3+6+4 Pt.)

(a) Wie lautet die Gleichung der Ebene, die parallel zu $5x - 2y + z - 5 = 0$ verläuft und durch den Punkt $P = (3, -6, 7)$ geht?

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ in $5x - 2y + z = \square$ einsetzen:

$$5 \cdot 3 - 2 \cdot (-6) + 7 = 15 + 12 + 7 = 34$$

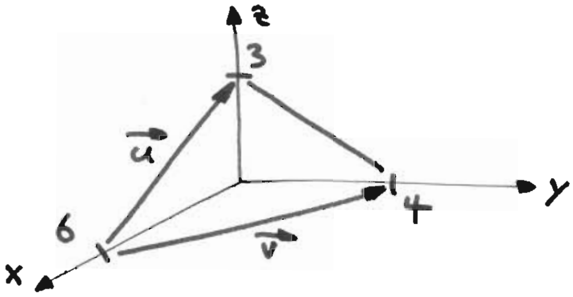
also: $\underline{\underline{5x - 2y + z = 34}}$

– 100 % korrekt: 3 Pt.
– Flüchtigkeitsfehler: 2 Pt.
– relevante Ansätze: 1 Pt.

3

(b) Die Ebene $12 = 2x + 3y + 4z$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A, B, C. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks ABC?

x-Achse: $y = z = 0$: $x = 6$
y-Achse: $x = z = 0$: $y = 4$
z-Achse: $x = y = 0$: $z = 3$ — 2



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ -24 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1

Idee: 2

$$\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \underline{\underline{3\sqrt{29}}}$$

1

6

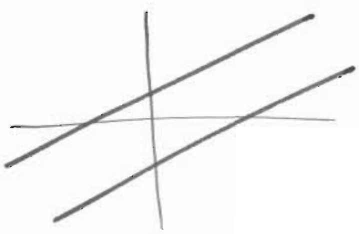
(c) In der Theorie und den Übungen haben wir gezeigt, wie man ein lineares 3×3-Gleichungssystem als Schnitt dreier Ebenen im Raum auffassen kann. In dieser Aufgabe machen Sie dasselbe eine Dimension tiefer für ein 2×2-Gleichungssystem:

Wie viele Lösungen kann ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten haben, und was bedeutet jeder dieser Fälle geometrisch?

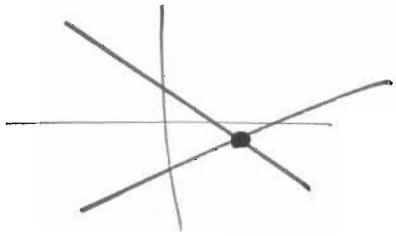
keine Lösung | **eine Lösung** | **∞-viele Lösungen** — 1

(sofern in Ebene ersichtlich ...)

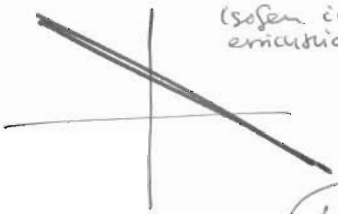
– voller Durchblick: 3 Pt.
– etwas unsicher: 2 Pt.
– relevante Ansätze: 1 Pt.



Geraden parallel.



Geraden schneiden sich in einem Pkt.



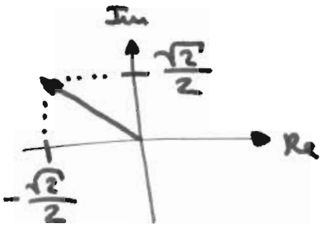
Geraden liegen aufeinander.

4

16 Pt.

Aufgabe 3 (3+3+3+4+3 Pt.)

(a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)^8 = \left(1\cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}}\right)^8$ ①



$= e^{j\cdot\frac{24\pi}{4}}$ ① $= e^{j\cdot 6\pi} = \underline{\underline{1}}$ ①

3

(b) $\left[2\cdot(\cos 40^\circ + j\cdot\sin 40^\circ)\right]^{10} =$ (Resultat: trigo. Form, Gradmaß)

$2^{10}\cdot(\cos 400^\circ + j\cdot\sin 400^\circ)$

$= \underline{\underline{1024\cdot(\cos 40^\circ + j\cdot\sin 40^\circ)}}$

3

(c) $\ln(-2j) = \ln\left(2\cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{2}}\right)$ ① oder: $-\frac{\pi}{2}$ (Resultat: Bogenmaß)

$= \underline{\underline{\ln(2) + j\cdot\left(\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)}}$ ② $(k\in\mathbb{Z})$

3

(d) Lösen Sie diese Gleichung: $\frac{x^4}{3} - 27 = 0$

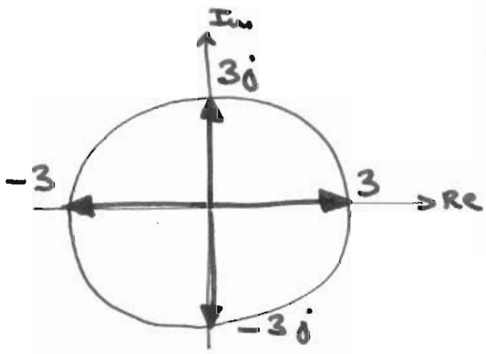
$\frac{x^4}{3} = 27$

$x^4 = 81$

$x = \sqrt[4]{81}$ ①

– nur eine Lsg. $x=3$: 0 Pt. (andere)
– alles in Exp.-Form : 1 Pt.
– z.T. in Exp-Form : 2 Pt.

4



$\underline{\underline{x_1 = 3,\ x_2 = 3j,\ x_3 = -3,\ x_4 = -3j}}$ ③

(e) Wie kontrollieren Sie mit MATLAB möglichst einfach Ihr Resultat von Teilaufgabe d ?
Bitte MATLAB-Befehle genau so hinschreiben, wie Sie diese eintippen würden.

– voller Durchblick : 3 Pt.
– in groben Zügen korrekt : 2 Pt.
– relevante Ansätze : 1 Pt.

```
>> x = [3 3j -3 -3j];
>> x.^4
```

$\longrightarrow$ muss [81 81 81 81] ergeben!

oder noch besser:

```
>> x.^4/3 - 27
```

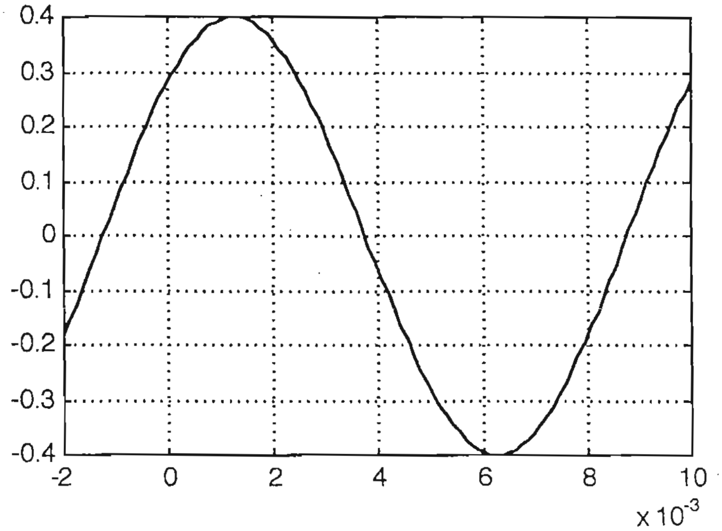
$\longrightarrow$ muss [0 0 0 0] ergeben!

3

Aufgabe 4 (4+5+4 Pt.)

13 Pt.

(a) Bestimmen Sie im Rahmen der Ablesegenauigkeit Amplitude, Periode, Frequenz, Kreisfrequenz und Nullphasenwinkel. Wie lautet die Cosinus-Funktion?



$A = 0.4$ (1)

$T = \frac{1}{100}$

$f = 100$

$\omega = 2\pi f \approx 630$ (1)

$\varphi = -\frac{\pi}{4} \hat{=} -45°$ (1)

akzept. zw. 30° und 60°

4

$0.4 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 100 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$ (1)

(b) Überlagern Sie diese beiden Schwingungen: (Rechnung im Komplexen, mit Zeigerdiagramm)

$$2 \cdot \cos\left(500.2 \cdot t\right) \qquad \text{und} \qquad 2 \cdot \sin\left(500.2 \cdot t + \pi\right)$$

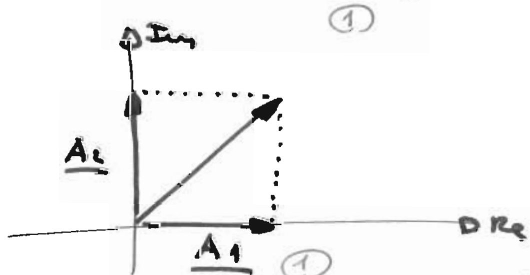
$$\| $$

$$2 \cdot \cos\left(500.2 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$ (1)

$\underline{A_1} = 2$

$\underline{A_2} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 2j$ (1)

$\underline{A} = \underline{A_1} + \underline{A_2} = 2 + 2j$



(1)

5

$|\underline{A}| = 2\sqrt{2}$

$\arg(\underline{A}) = \frac{\pi}{4}$ also: $2\sqrt{2} \cdot \cos\left(500.2 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$ (2)

(c) Wie lautet die Rechnung von Teilaufgabe b mit MATLAB? Ergänzen Sie:

```
>> u1 = 2;
>> u2 = 2*exp(j*pi/2);        (u2 in Exponentialform eingeben)
>> u = u1 + u2;
>> amplitude = abs(u);
>> nullphasenwinkel = angle(u);
```

(2) (1) (1)

4