Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Lineare Algebra
Klasse 2d	29.6.2005
Serie 42	**Test**

Name

Vorname

39 Pt. total → Note

- Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (5 Pt.)

Pt. 5

Berechnen Sie die inverse Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren und kontrollieren Sie Ihr Resultat vollständig:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) +1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ +2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +1 \\ -4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

d.h. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 ✓

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 ✓

5

Aufgabe 2 (4 x 3 Pt.)

12 Pt.

(a) Bestimmen Sie aus folgenden (nicht-linearen) Abbildungen die Komposition $g \circ f$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x-1 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{x_1+x_2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\begin{pmatrix} x^2 \\ 3x-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{e^{x^2+3x-1}}}$$

1

3

(b) Ist diese Abbildung linear? Saubere Begründung! $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4x \end{pmatrix}$

- mit einer der beiden Regeln sauber gezeigt: 1 Pt.
- mit den beiden Regeln sauber gezeigt: 2 Pt.
- "Nein": stets 0 Pt.

<u>ja</u>, denn $f(x) = \underbrace{\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}}}_{\text{Abb.-Matrix}} \cdot \underset{1\times 1}{(x)}$

3

(c) Ist diese Abbildung linear? Saubere Begründung! $\quad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

- "Ja": stets 0 Pt.
- "keine Matrix gefunden": 0 Pt.

<u>nein</u>, denn z.B.

$$g\begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \pi/2 \\ \pi/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$

$$g\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \pi \\ \pi + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$

müsste auch das Doppelte sein!

3

(d) Was bedeuten die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ geometrisch?

x wird mit z vertauscht, 1

d.h. Spiegelung an der Ebene $x = z$

muss als Begriff vorkommen ...

Falls "Gerade": 2 Pt.

3

Bei allen Teilaufgaben:
- korrekt + voller Durchblick: 3 Pt.
- eine Unsauberkeit / Detailfehler: 2 Pt.
- relevante Ansätze: 1 Pt.

Aufgabe 3 (5+2+4 Pt.)

11 Pt.

(a) Welche konstante Funktion $y = a$ geht möglichst gut durch folgende Punkte?

x	0	1	2	3
y	17	19	17	18

Zeigen Sie, wie Sie mit dem MATLAB-"\"-Befehl diese Aufgabe lösen (ohne Grafik).

```
>> x = [0 1 2 3]
>> y = [17 19 17 18]
```

Punkte einsetzen:
$$\left|\begin{array}{l} 17 = a \\ 19 = a \\ 17 = a \\ 18 = a \end{array}\right| \quad \text{d.h.} \quad \left|\begin{array}{l} 1\cdot a = 17 \\ 1\cdot a = 19 \\ 1\cdot a = 17 \\ 1\cdot a = 18 \end{array}\right|$$

In Matrix-Schreibweise:
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{A} \cdot a = \underbrace{\begin{pmatrix}17\\19\\17\\18\end{pmatrix}}_{b}$$

3

also:

```
>> A = ones(4,1);
>> b = y';
>> a = A\b
```

2

a 17.75

5

(b) Wie lösen Sie mit dem Mathematica-Fit-Befehl Teilaufgabe a (ohne Grafik)?

```
punkte = {{0,17},{1,19},{2,17},{3,18}}
```

das ist die Hauptsache! wenn das fehlt: 0 Pt.

a = Fit[punkte, 1, x]

Bem: notwendig obwohl bedeutungslos...

2

(c) Welche Wurzel-Funktion $v = c \cdot \sqrt[n]{u}$ geht möglichst gut durch folgende Punkte?

u	1	2	3	4	...
v	1.0	1.1	1.2	1.3	...

Zeigen Sie in einer kurzen Herleitung, wie Sie das Problem so schreiben können, dass es mit dem MATLAB-"polyfit"-Befehl lösbar ist.

$$v = c \cdot \sqrt[n]{u} = c \cdot u^{1/n}$$ 1 mit Ansatz (u.c.?)

$$\ln(v) = \ln(c) + \frac{1}{n} \cdot \ln(u)$$ 1

$$\ln(v) = \frac{1}{n} \cdot \ln(u) + \ln(c)$$ 1

$$y = a \cdot x + b$$ 1

4

Aufgabe 4 (4+3+2+2 Pt.)

11 Pt.

(a) Mit welchen MATLAB-Befehlen skizzieren Sie die Ortskurve dieser komplexen Funktion?

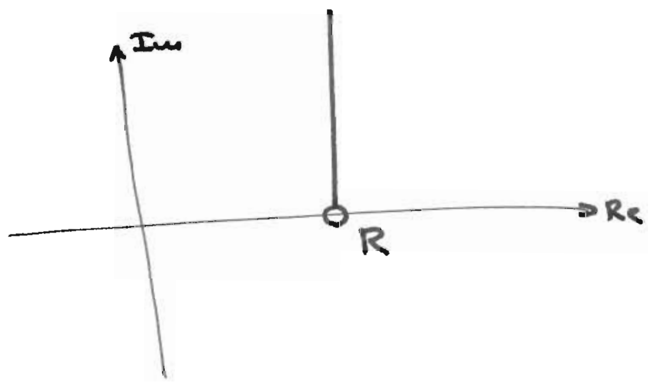
$$z(t) = t^2 \cdot (\sin t + j \cdot \cos t)$$

(Startwert 360° und 5 Umdrehungen)

```
>> t = linspace (2*pi , 6*2*pi , 1000);   } 1
>> z = t.^2.* (sin(t) + j· cos(t));        } 2
>> plot (z)                                } 1 — (Konzept)
```

4

(b) Skizzieren Sie von Hand die Ortskurve von: $z(\omega) = R - \dfrac{1}{j \cdot \omega C}$ $(0 < \omega < \infty)$



$= R + j \cdot \dfrac{1}{\omega C}$ 1

3

(c) Für welche(n) Wert(e) ω wird $z(\omega)$ aus Teilaufgabe b reell? $(0 < \omega < \infty)$

d.h. $\dfrac{1}{\omega C} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ für keinen Wert ω

2

(d) Ortskurven: Was ergibt ein Kreis, der den Ursprung berührt, bei Inversion?

FS, S. 228:

Gerade, die nicht durch den Ursprung verläuft.

2