Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Mathematik
Klasse 3d	6.1.2004
Serie 14	**Test**

Name	Vorname	46 Pt. total	→	Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (4+4 Pt.) — Pt. 8

(a) Um die Funktionsfähigkeit der Leber zu testen, werden 1.5 g eines radioaktiven Markers in das Blut eingespritzt und dessen Ausscheiden im Urin gemessen. Eine gesunde Leber scheidet pro Minute etwa 1 % des jeweils noch vorhandenen Markers aus. $m(t)$ ist die Menge des Markers (in Gramm) zum Zeitpunkt t. Wie lautet die DGL?

$m(0) = 1.5$ (1) ← völlig separat!

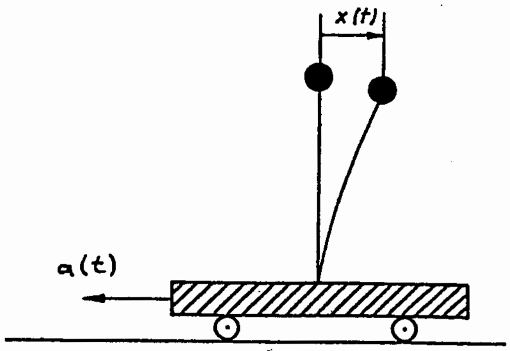
Ansatz: $\Delta m = -1\% \cdot m \cdot \Delta t$

DGL: $\dot{m} = -1\% \cdot m = -0.01 \cdot m$ (3)

4

– kleiner Detailfehler: −1 Pt.
– grösserer Fehler, aber subst. Beitrag: −2 Pt.

(b) Auf einem Fahrgestell ist mit einer Blattfeder eine Masse m befestigt. Der Wagen wird zeitabhängig mit $a(t) = e^t - 1$ beschleunigt. Die Feder hat die Federkonstante c. Stellen Sie die DGL für die Auslenkung $x(t)$ der Masse von der Gleichgewichtslage auf.



$$F = a \cdot m = \underbrace{-c \cdot x}_{\text{Feder}} + \underbrace{a(t) \cdot m}_{\text{Beschleunigung des Wagens}}$$ (2)

$$\ddot{x} \cdot m = -c \cdot x + (e^t - 1) \cdot m$$

also: $\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = e^t - 1$ (ohne Anfangsbed.) 4

– Detailfehler: −1 Pt. (z.B. Vorzeichen)
– grösserer inhaltlicher Fehler: −2 Pt.
– Ansätze: 1 Pt.

Aufgabe 2 (6+8 Pt.)

14 Pt.

(a) $y' = y \cdot x \cdot e^{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot x \cdot e^{x^2}$$

$$z = e^{x^2}$$
$$\frac{dz}{dx} = e^{x^2} \cdot 2x$$
$$dz = 2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx$$

Idee: 1

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx \quad 2$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{1}{2} \cdot dz \quad 1$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2} z + c_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c_1 \quad 1$$

$$\underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{\left(\frac{1}{2} \cdot e^{x^2}\right)}}} \quad 1$$

6

Variante:

$$z = x^2$$
$$\frac{dz}{dx} = 2x$$
$$dz = 2x \cdot dx$$

$$\ldots = \int \frac{1}{2} \cdot e^{z} \cdot dz$$

(b) $xy' + y = \ln x$

entspricht: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{\ln x}{x}$

$f(x) = 1/x$ 1

homogen: $\underline{\underline{y_h(x)}} = c \cdot e^{-F(x)} = c \cdot e^{-\ln(x)} = \underline{\underline{\frac{c}{x}}}$ 2

inhomogen: Ansatz Variation der Konstante(n): $y_p = \frac{c(x)}{x}$ 1

$$x \cdot \left[\frac{c(x)}{x}\right]' + \left[\frac{c(x)}{x}\right] = \ln(x) \quad 1$$

$$x \cdot \frac{c'(x) \cdot x - c(x) \cdot 1}{x^2} + \frac{c(x)}{x} = \ln(x)$$

$$c'(x) - \cancel{\frac{c(x)}{x}} + \cancel{\frac{c(x)}{x}} = \ln(x) \quad 1$$

$$c(x) \overset{\boxed{332}}{=} x \cdot (\ln x - 1) \quad 1$$

also: $\underline{\underline{y_p(x)}} = \frac{c(x)}{x} = \underline{\underline{\ln x - 1}}$

somit: $\underline{\underline{y(x)}} = y_h + y_p = \underline{\underline{\frac{c}{x} + \ln x - 1}}$ 1

8

– sobald kl. Fehler, der nachw. Konsequ. hat: –2 Pt. min.
– –1 Pt. nur für allerkleinste Fehler!

Aufgabe 3 (5×2+1+2 Pt.)

13 Pt.

(a) $y(x) = \dfrac{A \cdot x}{x+1} + \dfrac{B \cdot x}{-1-x}$ ist die allgemeine Lösung von $x(1+x)y' - y = 0$. Stimmt das?

(Lsg. einsetzen würde stimmen)

– "ja": 0 Pt. (oder ohne Antwort) (oder nachrechnen mit "nein")

DGL 1. Ord: allg. Lsg. hat nur 1 Parameter!

$\Longrightarrow$ <u>nein</u>

2

(b) $y' - 3y = \underbrace{\arctan(\sin^2(x + \ln x))}_{\text{unwichtig!}}$. Wie lautet y_h?

$a = -3$

$$\underline{\underline{y_h = c \cdot e^{3x}}}$$

– $c \cdot e^{-3x}$: 1 Pt.

2

(c) Wie lautet der Ansatz für y_p in $y' - 3y = 3 \cdot \sin(\underset{\omega=2}{2x}) + 2 \cdot \sin(\underset{\omega=3}{3x})$?

– $c_1 \cdot \sin(2x) + c_2 \cdot \cos(2x)$: 1 Pt.

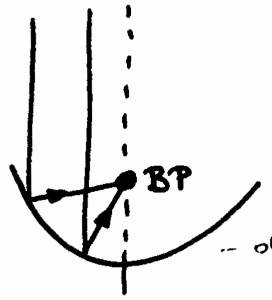
– $c_1 \cdot \sin(2x) + c_2 \cdot \cos(3x)$: 0 Pt.

2

also: $y_p = \underbrace{c_1 \cdot \sin(2x) + c_2 \cdot \cos(2x)}_{\omega=2} + \underbrace{c_3 \cdot \sin(3x) + c_4 \cdot \cos(3x)}_{\omega=3}$

(d) Erklären Sie in Stichworten oder einer Skizze, warum der Brennpunkt einer Parabel Brennpunkt heißt.

Jeder Strahl parallel zur Symmetrieachse wird in den BP refuktiert.



– ohne "parallel": 1 Pt.

2

(e) Was versteht man unter der Abstands-Eigenschaft beim Brennpunkt einer Parabel?

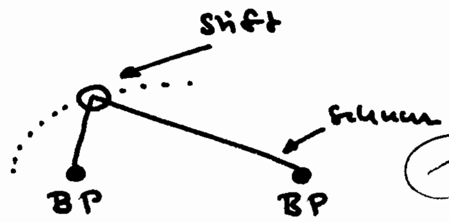
Die Laufzeit jedes Strahls bis zum BP (bei Reflexion) ist konstant!

– ohne "Leitlinie": 1 Pt.

2

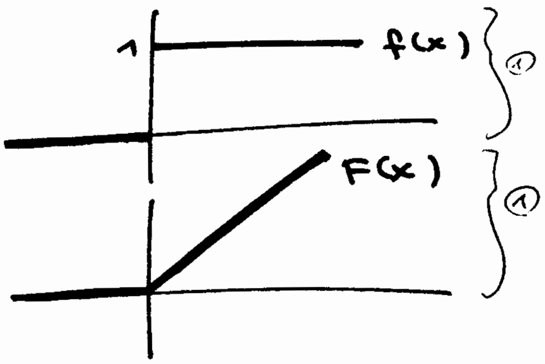
(f) Wie funktioniert der „Gärtner-Trick" bei der Konstruktion einer Ellipse?

dito: Abstands-Eigenschaft zu Brennpunkten gilt (auch) bei der Ellipse.



1

(g) Skizzieren Sie eine möglichst einfache unstetige Funktion $f(x)$ und eine Stammfunktion von $f(x)$.



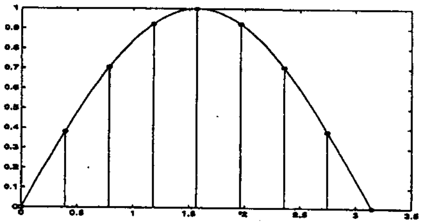
– f(x) nicht unstetig: 0 Pt.

2

Aufgabe 4 (2+1+2+1+2+3 Pt.)

11 Pt.

(a) Wie erzeugen Sie mit MATLAB diese Skizze eines Sinus-Bogens?



```
>> xSin = linspace(0,pi);
>> plot(xSin, sin(xSin))
>> hold on
>> x = linspace(0,pi,9);
>> stem(x, sin(x))
```

(1) (1) 2

(b) Sie haben in MATLAB einen Zeilen-Vektor v der Länge 1000. Wie dezimieren Sie v möglichst einfach auf nur noch jede dritte Komponente?

```
>> v = v(1:3:1000);
```

– nur richtig/falsch (genau so)

1

(c) Sie haben in MATLAB einen Zeilen-Vektor v der Länge 1000. Wie spreizen Sie v möglichst einfach auf die dreifache Länge?

```
>> M = [v; zeros(3,1000)];
>> v = M(:)';
```

2

(d) Sie haben in MATLAB einen Zeilen-Vektor v der Länge 1000. Wie finden Sie die Stellen (Indizes) der Komponenten in v, die größer als 100 sind?

```
>> find(v>100)
```

– nur genau so: 1 Pt.

1

(e) `>> x = linspace(0,10,10*8192);`
`>> sound(sin(2*pi*x))`

Sie hören nichts! Warum?

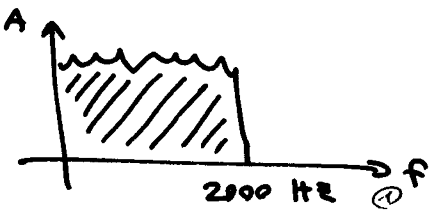
10 Sekunden 1 Hz (1)
weit unter Hörgrenze (1)!

2

(f) Erklären Sie erstens, was rosa Rauschen ist, zweitens wie das Frequenz-Spektrum von rosa Rauschen aussieht, und drittens wie man möglichst einfach rosa Rauschen mit MATLAB erzeugen kann.

(1) Rauschen, dessen Wechsel Frequenz beschränkt ist, auf z.B. 2000 Hz. Tönt "stumpf" ... (1)

(2)



(1)

(3)
```
>> y = rand(1,4000)*2-1;
>> sound(y, 4000)
```
(1)

3