Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Mathematik
Klasse 4d	27.4.2004
Serie 33	**Test**

Name | Vorname | 42 Pt. total → Note

- Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 80 Minuten.

Aufgabe 1 (3+2+5 Pt.)

10 Pt.

5

(a) $\boxed{\ddot{x} - x + t = 0}$

Berechnen Sie x_h.

hom. DGL : $\ddot{x} - x = 0$, d.h. $a = 0$, $b = -1$ 1

$a^2 - 4b = 4 > 0$ 1 $\quad \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{4}}{2} = \pm 1$

also : $\underline{\underline{x_h = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{t}}}$ 1

3

(b) $\boxed{\ddot{x} - x + t = 0}$

Wie lautet der Lösungsansatz für x_p?

$b \neq 0$ 1 : $\underline{\underline{x_p = a \cdot t + b}}$ 1

2

(c) $\boxed{\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 3 \cdot \cos 5t}$

Sie haben bereits $\lambda_{1,2} = -5$ bestimmt. Berechnen Sie x_p.

Ansatz : $j \cdot 5$ ist keine Lösung der char. Gleichung 1 :

$x_p = A \cdot \sin(5t) + B \cdot \cos(5t)$ 1

$\dot{x}_p = 5 \cdot A \cdot \cos(5t) - 5 \cdot B \cdot \sin(5t)$

$\ddot{x}_p = -25 \cdot A \cdot \sin(5t) - 25 \cdot B \cdot \cos(5t)$

Einsetzen:

$$-25 \cdot \cancel{A \cdot \sin}(5t) - 25 \cdot \cancel{B \cdot \cos}(5t) + 50 \cdot A \cdot \cos(5t) - 50 \cdot B \cdot \sin(5t) + 25 \cdot \cancel{A \cdot \sin}(5t) + 25 \cdot \cancel{B \cdot \cos}(5t) = 3 \cdot \cos(5t)$$

$\Longrightarrow B = 0$, und $50 \cdot A = 3$, d.h. $A = \frac{3}{50}$

somit : $\underline{\underline{x_p = \frac{3}{50} \cdot \sin(5t)}}$ 3

5

Aufgabe 2 (6 + 3 + 3 Pt.)

Pt. 12

5

(a) Zeigen Sie im Detail, wie man mit MATLAB (nicht Simulink) die DGL $y'' + 3y = e^x$, mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ für $0 \le x \le 10$ löst.

$y_1 := y$

$y_2 := y'$ (1)

d.h. $\left| \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = -3 \cdot y_1 + e^x \end{array} \right|$ (1) mit $\left| \begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{array} \right|$ (1)

File dgl.m :

```
function [yprime] = dgl (x,y)
yprime = [0 0]';  % 2x1 - vektor
yprime (1) = y(2);
yprime (2) = -3 * y(1) + exp (x);
```

(2)

(Nicht jeder Detailfehler mit Abzug)

Dann Aufruf:

```
>> [x y] = ode45 (@dgl , [0 10] , [0 1]);
```

(1)

6

(b) „Stoßdämpferproblem": Mit welchem Widerstand R muss eine Leitung mit einer Leitungsinduktivität von $L = 18\,\text{nH}$ und einer Kapazität von $C = 2\,\text{nF}$ terminiert werden, damit es keine Leitungsreflexionen gibt (aperiodischer Grenzfall)? Leiten Sie zuerst die allgemeine Formel für R her und berechnen Sie dann R (vgl. FS S. 282).

Aperiodischer Grenzfall: $\delta = \omega_0$, d.h. $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (1)

somit: $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ in diesem Fall:

$R^2 = \frac{4L^2}{LC}$ $\qquad \underline{\underline{R}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{18}{2}} = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6\,\Omega}}$ (1)

$\underline{\underline{R = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}}$ (1)

3

(c) Erzwungene Schwingung, stationäre Lösung: Berechnen Sie $A(\omega_r)$.

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ $\qquad K_0 = \frac{F_0}{m}$

$A(\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{K_0}{\sqrt{(2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}}$ (2)

$= \frac{K_0}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}} = \frac{K_0}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}}$

$= \underline{\underline{\frac{K_0}{2\delta \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}}$ (1) $= \frac{K_0}{2\delta \cdot \omega_d}$

3

Aufgabe 3 (3+3+1+4 Pt.)

11 Pt.

6

(a) Sie haben im Fach Mathematik während total 9 Lektionen die Laplace-Transformation kennen gelernt. Warum wird die Laplace-Transformation überhaupt eingesetzt? Welches sind die Vor- und Nachteile gegenüber den anderen Verfahren, die wir im Fach Mathematik durchgenommen haben? Bitte die beiden – gemäß Ihrer Meinung – wichtigsten Punkte in Stichworten oder kurzen Sätzen darlegen.

In Bezug auf den im "Mathematik" behandelten Stoff:

- wir können alle DGL auch konventionell lösen.
- Jedoch mit Laplace-Transformation viel bequemer, schneller, sicherer (d.h. weniger Fehler)

- voller Durchblick + kompetent: 3 Pt.
- nicht stringent aber dabei: 2 Pt.
- Ansätze: 1 Pt.

3

(b) Was halten Sie von folgender Rechnung? Wo gefällt Ihnen was nicht? Begründung mit Stichworten, allenfalls verbesserte Rechnung.

$$\underbrace{\mathcal{L}\Big(\int_0^t \tau \cdot e^{a\tau}\, d\tau\Big)}_{(*)} = \mathcal{L}\Big(\frac{a\cdot\tau-1}{a^2}\cdot e^{a\tau}\Big|_0^t\Big) = \mathcal{L}\Big(\frac{(a\cdot t-1)\cdot e^{at}+1}{a^2}\Big) = \frac{1}{s\cdot(s-a)^2}$$

umständlich! Denn: Integration im Zeitbereich entspricht Multiplikation mit $\frac{1}{s}$ im Bildbereich.

also einfacher: $(*) = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}(t\cdot e^{at}) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-a)^2}$

3

- Bewertung mit Teilaufgabe a

(c) $\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{s}}\Big) \overset{(75)}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$

- nur richtig/falsch!

1

(d) Bestimmen Sie die Tangentialebene an $z=(x^2+y^2)\cdot e^{-x}$ im Punkt $(x_0;y_0)=(0;1)$.

$z_x = 2x\cdot e^{-x} + (x^2+y^2)\cdot(-1)\cdot e^{-x} = (2x-x^2-y^2)\cdot e^{-x}$ 1

$z_y = 2y\cdot e^{-x}$ 1

$z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{1} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{-1}\cdot(x-\underbrace{x_0}_{0}) + \underbrace{f_y(x_0,y_0)}_{2}\cdot(y-\underbrace{y_0}_{1})$

1

$= 1 - x + 2\cdot(y-1)$

$= 1 - x + 2y - 2$

$\underline{\underline{z = -x+2y-1}}$ 1

4

Aufgabe 4 (9 Pt.)

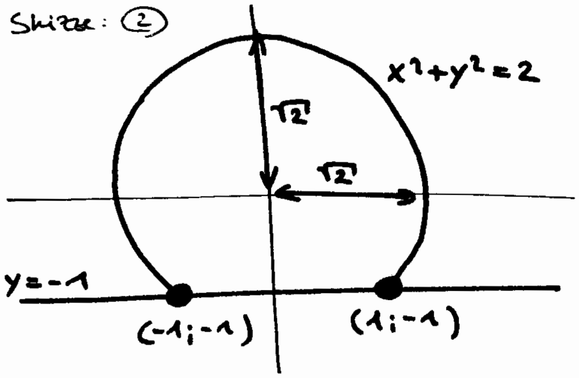
Pt. 9

4

Die Funktion $z = x^2 + y^2$ ist definiert auf dem Gebiet eingeschlossen durch die Grafen von $y = -1$ und $x^2 + y^2 = 2$ (oberer Teil der Kreisfläche). Finden Sie die Extremalstellen.

Bitte vollständige Berechnung, so wie in der Stunde gelernt, inkl. Skizze des Gebietes.

Skizze: 2



Innerhalb Gebiet

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 2x \stackrel{!}{=} 0 \\ z_y = 2y \stackrel{!}{=} 0 \end{array}\right\} \quad (x_0; y_0) = (0;0)$$

1

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{yx} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$z_{xx} = 2 > 0$, d.h. Minimum bei $(0;0)$: $z(0,0) = 0$

1

$y=-1$

$z(x,-1) = x^2+1$: Hat Minimum bei $x=0$: $z(0,-1) = 1$

1

$x^2+y^2=2$

d.h. $z=2$: Extremalstellen überall auf $x^2+y^2=2$: $z=2$

2

$(-1;-1)$
$(1;-1)$

auch $z=2$

1

d.h. globales Minimum bei $(0;0)$
Maximum auf Kreissegment
inkl. $(-1;-1)$ und $(1;-1)$

Zusammenfassung: 1