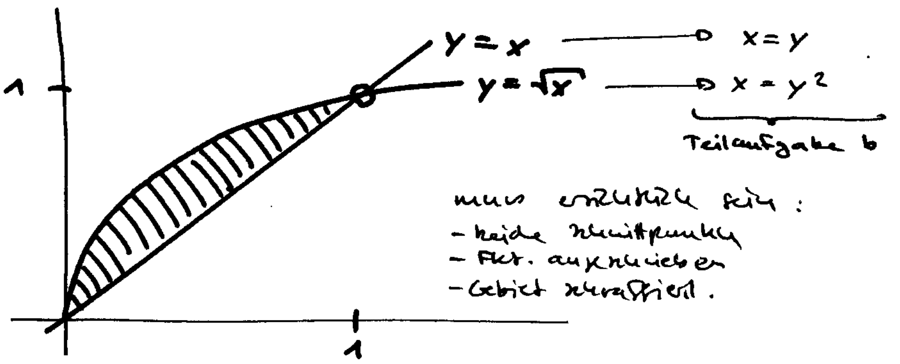
Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Mathematik
Klasse 4d	1.7.2004
Serie 43	**Test**

Name: | Vorname: | Pt. total: 34 → Note:

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 60 Minuten.

Aufgabe 1 (3+4+2+2 Pt.) — Pt.: 11

(a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet des Integrals $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x \cdot y \; dy\, dx\,.$



muss ersichtlich sein:
- beide Schnittpunkte
- Fkt. anschreiben
- Gebiet schraffiert.

3

(b) Schreiben Sie das obige Integral in der Form $\iint \ldots \, dx\, dy$ und berechnen Sie es.

$$\int_0^1 \underbrace{\int_{y^2}^{y} xy \cdot dx}_{\left[\frac{x^2}{2} y\right]_{x=y^2}^{x=y} \;=\; \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}} \cdot dy \quad (2) \quad = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\right) \cdot dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

4

(c) Mit welchem Mma-Befehl berechnen Sie das Integral von Teilaufgabe a?

```
Integrate[x y , {x,0,1} , {y, x, Sqrt[x]} ]
```

2

(d) Wie lautet das Integral von Teilaufgabe a als Dreifachintegral?

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} 1 \cdot dz\, dy\, dx$$

2

Aufgabe 2 (8 Pt.)

Pt. 8

Zur Bestimmung der $\overline{z}$-Koordinate des Schwerpunktes eines Körpers verwendet man:

$$\overline{z} = \frac{1}{m} \cdot \int_V z \cdot \rho(x,y,z)\, dV$$

Berechnen Sie $\overline{z}$ für die homogenen Halbkugel (oberhalb der xy-Ebene) mit Radius R. Lösen Sie die Aufgabe mit Zylinder-Koordinaten und nicht mit Kugel-Koordinaten!

Nehme, da homogen, $\rho(x,y,z) = 1$

dann: $m = V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ } (1)

$$\int_V z \cdot dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z \cdot r \cdot dz\, dr\, d\varphi$$ } (3)

$$\left[\frac{z^2}{2} \cdot r\right]_{z=0}^{z=\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$\frac{(R^2-r^2) \cdot r}{2} = \frac{R^2 r}{2} - \frac{r^3}{2}$$

$$\left[\frac{R^2 r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{8} = \frac{R^4}{8}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{8}\, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{R^4}{8} = \frac{\pi R^4}{4}$$

also: $\overline{z} = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \cdot \frac{\pi R^4}{4} = \frac{3}{8} \cdot R$

– Resultat falsch + unklar in der Lax, Fehler zu finden: – 2 Pt.

8

Resultatkontrolle: $\overline{z} = \frac{3}{8} R$

Aufgabe 3 (4+4+2 Pt.)

10 Pt.

(a) Zur Bestimmung eines Widerstandes wurden gemessen:

$$I = 10\,\mathrm{A}\ (\pm 20\%) \qquad U = 100\,\mathrm{V}\ (\pm 10\%)$$

Berechnen Sie den Widerstand R, sowie dessen *mittleren Fehler nach Gauß.*

$R(U,I) = \frac{U}{I} = 10$ (1) mit $I = 10 \pm 2$ $\quad U = 100 \pm 10$

$$\Delta R = \sqrt{(R_U \cdot \Delta U)^2 + (R_I \cdot \Delta I)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U}{I^2} \cdot \Delta I\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{10} \cdot 10\right)^2 + \left(-\frac{100}{10^2} \cdot 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

4

– nur norm. Fehler : max 2 Pt. (Resultat = ±3)

(b) Differenzieren Sie die Funktion $z = x^2y^2 + \sqrt{x}$ mit $x(t) = t^2$, $y(t) = \sqrt{t}$ nach dem Parameter t unter Verwendung der verallgemeinerten Kettenregel.

$f_x = 2xy^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \dot{x} = 2t$

$f_y = 2x^2y$ (1) $\qquad \dot{y} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\dot{z} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y}$$

$$= \left(2xy^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 2t + 2x^2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (1)$$

$$= \left(2 \cdot t^2 \cdot t + \frac{1}{2t}\right) \cdot 2t + 2 \cdot t^4 \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (1)$$

$$= 4t^4 + 1 + t^4$$

$$= \underline{\underline{5t^4 + 1}} \quad (1)$$

4

– Falsches Resultat (bzg. c), ohne darauf zu reagieren : –1 Pt.

(c) Kontrollieren Sie Ihr Resultat von Teilaufgabe b durch Einsetzen der beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung.

$$z = t^4 \cdot t + t = t^5 + t$$

$$\underline{\underline{\dot{z} = 5t^4 + 1}}$$

2

Aufgabe 4 (5 Pt.)

Pt. 5

Eine Metallplatte in der xy-Ebene hat eine Temperatur T im Punkt $(x;y)$, die umgekehrt proportional zum Abstand von der y-Achse ist. Die Temperatur im Punkt $P = (3;4)$ ist $30°$ K. Berechnen Sie, in welcher Richtung in P die Temperatur am schnellsten zunimmt, in welcher Richtung sie am schnellsten abnimmt und in welchen Richtungen die Temperaturänderung null ist.

$$T(x,y) = k \cdot \frac{1}{x} \quad 1$$

$$T(3,4) = k \cdot \frac{1}{3} = 30 \longrightarrow k = 90$$

also: $$\underline{\underline{T(x,y) = \frac{90}{x}}} \quad 1$$

$$\nabla T = \begin{pmatrix} -\frac{90}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\nabla T(3,4) = \begin{pmatrix} -\frac{90}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad 1$$: grösste Zunahme

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$: grösste Abnahme

orthogonal dazu: $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}}$: keine Änderung 1

5