

Serie 14

Test

Name

Vorname

37
Pt. total

Note

- Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (6 Pt.)

6
Pt.

Lösen Sie mit Substitution:

$$y' = (1 - y)^2$$

$$\begin{aligned} z &= 1 - y \\ y &= 1 - z \\ y' &= -z' \quad (1) \end{aligned}$$

$$-z' = z^2 \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$\int \frac{1}{z^2} \cdot dz = - \int 1 \cdot dx \quad (1)$$

$$-\frac{1}{z} = -x + C_1 \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{x + C_1}$$

$$1 - y = \frac{1}{x + C_1}$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x + C_1} \quad (2)$$

$$y' = e^{\frac{x}{2}+y} \quad y(0) = \lambda$$

Separieren: $\frac{dy}{dx} = e^{x/2} \cdot e^y$ (1)

$$\int e^{-y} \cdot dy = \int e^{x/2} \cdot dx$$
 (1)

$$-e^{-y} = 2 \cdot e^{x/2} + C_1$$
 (1)

$$e^{-y} = -2 \cdot e^{x/2} + C$$

$$-y = \ln(C - 2 \cdot e^{x/2})$$

$$\underline{\underline{y(x) = -\ln(C - 2 \cdot e^{x/2})}} \quad (1)$$

$$y(0) = -\ln(C - 2) = \lambda$$

$$\ln(C - 2) = -\lambda$$

$$C - 2 = e^{-\lambda}$$

$$C = e^{-\lambda} + 2$$
 (1)

$$\underline{\underline{y(x) = -\ln(e^{-\lambda} + 2 - 2 \cdot e^{x/2})}} \quad (1)$$

- Subst. gibt keine Punkte.

Aufgabe 3 (6 Pt.)

6
Pt.

Lösen Sie mit Variation der Konstante(n):

$$y' - 3y = x \cdot e^x$$

$$\underline{y_h = c \cdot e^{3x}} \quad (1)$$

Ansatz: $y(x) = c(x) \cdot e^{3x} \quad (1)$

$$[c(x) \cdot e^{3x}]' - 3 \cdot [c(x) \cdot e^{3x}] = x \cdot e^x \quad (1)$$

$$c'(x) \cdot e^{3x} + \underbrace{c(x) \cdot 3 \cdot e^{3x} - 3 \cdot c(x) \cdot e^{3x}}_0 = x \cdot e^x$$

$$c'(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^x$$

$$c'(x) = x \cdot e^{-2x} \quad (1)$$

$$\boxed{313} \quad a = -2$$

$$c(x) = \left(\frac{-2x-1}{4} \right) \cdot e^{-2x} \quad (1)$$

$$\underline{y_p = -\frac{2x+1}{4} \cdot e^x}$$

$$\underline{y(x) = c \cdot e^{3x} - \frac{2x+1}{4} \cdot e^x} \quad (1)$$

nur, falls alles richtig!

6

Aufgabe 4 (3+4+3 Pt.)

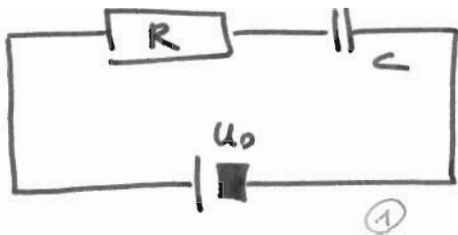
- (a) Ein Kollege von Ihnen hat eine DGL gefunden, die ein technisches Problem modelliert: $\ddot{x} = -x$. Dann berechnet er die allgemeine Lösung: $x(t) = A \cdot \sin t$. Was meinen Sie dazu?

Einschreiben: Das ist tatsächlich eine Lösung! ^①

Jedoch: 2. Ordnung müsste 2 Parameter haben. ^②

D.h. Aussage stimmt so nicht! ③

- (b) Ein Widerstand R und ein Kondensator C in Serie werden an eine Batterie der Spannung U_0 angeschlossen. Der Kondensator ist anfänglich entladen. Zeichnen Sie das Schema und stellen Sie die DGL für den Strom auf, samt Anfangsbedingung(en).



$$U_R + U_C = U_0$$

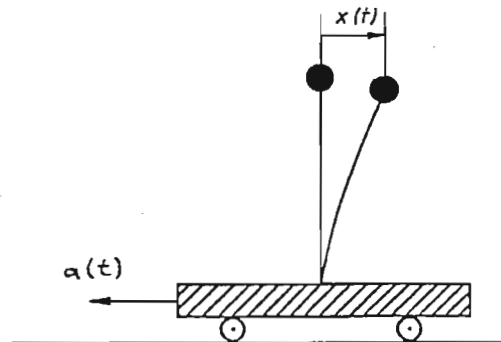
$$R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = U_0 \quad \text{①} \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0 \quad \text{①}$$

$$\underline{\underline{i(0) = \frac{U_0}{R} \quad \text{①}}}$$

$$\underline{\underline{\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i = 0}} \quad \text{④}$$

- (c) Auf einem Fahrgestell ist mit einer Blattfeder eine Masse m befestigt. Der Wagen wird zeitabhängig mit $a(t) = 5 - e^{-t}$ beschleunigt. Die Feder hat die Federkonstante c . Stellen Sie die DGL für die Auslenkung $x(t)$ der Masse von der Gleichgewichtslage auf.



$$F = a \cdot m = \underbrace{-c \cdot x}_{\text{Feder}} + \underbrace{a(t) \cdot m}_{\text{Beschleunigung des Wagens}}$$

$$\ddot{x} \cdot m = -c \cdot x + (5 - e^{-t}) \cdot m$$

$$\text{also: } \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 5 - e^{-t}}}$$

- keine Anfangsbedingungen!
- $\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 5$: 1 Pt.

Aufgabe 5 (3+2+4 Pt.)

Pt. 9

(a) Notieren Sie in einigen Stichworten alles, was Sie über die Reflexionseigenschaften der Ellipse wissen.

- Strahl durch die Brennpunkte (BP) \Rightarrow immer wieder durch die Brennpunkte ①
- Strahl innerhalb der BP-Verbindung \Rightarrow bleibt innerhalb ① (auch für nur einen Teil)
- Strahl außerhalb der BP-Verbindung \Rightarrow bleibt außerhalb ①
- Strahl von BP zu BP hat stets die gleiche Länge ("Gärtner-Trick") ①

- ev. Zusatzpunkt bei durchgehenden weitergehenden Kurven...

3

(b) Das hohe A hat eine Frequenz von 1760 Hz. Welche Frequenz hat das A zwei Oktaven höher?

$$2 \cdot 2 \cdot 1760 = \underline{\underline{7040 \text{ Hz}}}$$

2

(c) In den 1×1000 MATLAB-Vektoren a und b sind die Anfangs- und Endpunkte von 1000 Strecken auf der Zahlengerade abgelegt. Mit welchen MATLAB-Befehlen können Sie die kürzeste Strecke und die Nummer der kürzesten Strecke bestimmen?

(erzeugen: $a = \text{rand}(1, 1000); b = \text{rand}(1, 1000);$)

$$\Rightarrow d = \text{abs}(a - b); \quad (\text{wichtig mit } \sqrt{x^2 + y^2} \text{ !!})$$

1. Variante

```

>> [m, i] = sort(d);
>> m(1)  $\rightarrow$  Länge ①
>> i(1)  $\rightarrow$  Index ①
    
```

2. Variante

```

>> m = min(d)  $\rightarrow$  Länge ①
>> i = find(d == m)  $\rightarrow$  Index ①
<-----
>> [m, i] = min(d)
    
```

4