Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Mathematik
Klasse 4d	11.4.2005
Serie 32	**Test**

Name | Vorname | 48 Pt. total → Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 80 Minuten.

Aufgabe 1 (6 Pt.)

6 Pt.

Bestimmen Sie die Tangentialebene an $f(x,y) = 2 \cdot \ln\sqrt{x^2 + 2\cdot y^2}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 1)$.

$$" = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 2y^2)$$

$$" = \ln(x^2 + 2y^2) \quad (1)$$

nur falls dies gesehen ...

$$f_x = \frac{1}{x^2 + 2y^2} \cdot 2x \quad (1)$$

$$f_y = \frac{1}{x^2 + 2y^2} \cdot 4y \quad (1)$$

$$f(\sqrt{2}, 1) = \ln(2+2) = \ln 4$$

$$f_x(\sqrt{2}, 1) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y(\sqrt{2}, 1) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = 1 \quad (2)$$

$$z = \ln 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x - \sqrt{2}) + 1 \cdot (y - 1) \quad (1)$$

$$z = \ln 4 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + y$$

6

Aufgabe 2 (4 + 2 + 5 + 2 + 1 Pt.)

14 Pt.

$$\boxed{2\,\ddot{x} + 4\,\dot{x} + 4\,x = 10 \cdot \cos t}$$

(a) Berechnen Sie x_h.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 5 \cdot \cos t$$

$a = 2 \qquad b = 2$ (1)

$a^2 - 4b = 4 - 8 = -4 < 0$, d.h. Fall 3 (1)

$\underline{\underline{\alpha}} = -\frac{a}{2} = \underline{\underline{-1}} \qquad \underline{\underline{\omega}} = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2-1} = \underline{\underline{1}}$ (1) $\qquad \underline{\underline{\lambda_{1,2} = -1 \pm i}}$

$$\underline{\underline{x_h = C_1 \cdot e^{-t} \cdot \sin(t) + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(t)}}$$ (1)

4

(b) Mit welchem Mathematica-Befehl berechnen Sie x_h (exakt, nicht numerisch)?

```
DSolve[2x''[t] + 4x'[t] + 4x[t] == 0, x[t], t]
```

2

(c) Berechnen Sie x_p.

Lösung bitte auf die Rückseite von Aufgabe 1!

5

(d) Kontrollieren Sie Ihre Lösung von Teilaufgabe c möglichst einfach.

Einsetzen: (xp natürlich)

(1)

$$(-2 \cdot \sin t - \cos t) + 2 \cdot (2 \cdot \cos t - \sin t) + 2 \cdot (2 \cdot \sin t + \cos t) \overset{?}{=} 5 \cdot \cos t$$

stimmt! (1)

2

(e) Wie lautet die allgemeine Lösung $x(t)$?

$$\underline{\underline{x(t) = C_1 \cdot e^{-t} \cdot \sin(t) + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t) + \cos(t)}}$$

1

Für 1 Pt. muss wirklich Fix-Fehler klar darstellen ...

Ansatz: j ist <u>keine</u> Lsg. der charakt. Gleichung: 1

$$x_p(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t)$$ 1

$$\left[A \cdot \sin t + B \cdot \cos t\right]'' + 2 \cdot \left[A \cdot \sin t + B \cdot \cos t\right]'$$
$$+ 2 \cdot \left[A \cdot \sin t + B \cdot \cos t\right] = 5 \cdot \cos t$$

$$-A \cdot \sin t - B \cdot \cos t + 2 \cdot A \cdot \cos t - 2 \cdot B \cdot \sin t$$
$$+ 2 \cdot A \cdot \sin t + 2 \cdot B \cdot \cos t = 5 \cdot \cos t$$ 1

$$\left| \begin{array}{rcl} A - 2B &=& 0 \\ 2A + B &=& 5 \end{array} \right| \Longrightarrow \begin{array}{l} B = 1 \\ A = 2 \end{array}$$ 1

also: $\underline{\underline{x_p = 2 \cdot \sin t + \cos t}}$ 1

Aufgabe 3 (5 + 3 + 3 + 4 Pt.)

15 Pt.

(a) (ohne FS, von Grund auf berechnen)

$$\mathcal{L}\left(e^{\alpha \cdot t}\right) = \int_0^\infty e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

$$= \int_0^\infty e^{(\alpha - s)\cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

$$= \left. \frac{e^{(\alpha - s)\cdot t}}{\alpha - s} \right|_0^\infty \quad (1) \qquad \boxed{\alpha < s} \quad (1)$$

$$= 0 - \frac{1}{\alpha - s} = \frac{1}{s - \alpha} \quad (1)$$

5

(b) (FS erlaubt, möglichst einfach!)

$$\mathcal{L}\left(C \cdot e^{1-t}\right) = \mathcal{L}\left(C \cdot e \cdot e^{-t}\right) \quad (1)$$

– mit Integral korrekt gelöst: 1 Pt.

$$= C \cdot e \cdot \underbrace{\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)}_{\frac{1}{s+1}} \quad (1)$$

$$= \frac{C \cdot e}{s+1} \quad (1)$$

3

(c) (FS erlaubt, möglichst einfach!)

$$\mathcal{L}\left(t * e^{-t}\right) = \underbrace{\mathcal{L}(t)}_{\frac{1}{s^2}} \cdot \underbrace{\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)}_{\frac{1}{s+1}} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{s^2 \cdot (s+1)} \quad (2)$$

3

(d) Transformieren Sie und lösen Sie nach $Y(s)$ auf: $\boxed{3\,y' + 2\,y = t, \quad y(0) = 0}$

$$y' \circ\!\!-\!\!\bullet\; s \cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{0} = s \cdot Y(s) \quad (1)$$

also: DGL $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $\underbrace{3 \cdot s \cdot Y(s) + 2 \cdot Y(s) = \frac{1}{s^2}}$ (2)

$$Y(s) \cdot (3s + 2) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(3s+2) \cdot s^2} \quad (1)$$

4

Aufgabe 4 (5+5+3 Pt.)

13 Pt.

(a) Ein mechanisches System im aperiodischen Grenzfall (d.h. $\delta = \omega_0$) hat die allgemeine Lösung $x(t) = C_1 \cdot e^{-\delta t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\delta t}$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit es eine Nullstelle für $t > 0$ gibt, und wie lautet diese Nullstelle?

$$c_1 \cdot e^{-\delta t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\delta t} = 0$$

$$\underbrace{e^{-\delta t}}_{\neq 0} \cdot \left[c_1 + c_2 \cdot t \right] = 0 \quad (1)$$

$$c_1 + c_2 \cdot t = 0 \quad (1)$$

$$t = -\frac{c_1}{c_2} \quad (1)$$

5

Damit $t>0$ muss $\frac{c_1}{c_2} < 0$ sein, d.h.

c_1 und c_2 haben entgegengesetztes Vorzeichen. (2)

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktion $z = 2\sqrt{x^2 + 10y}$.

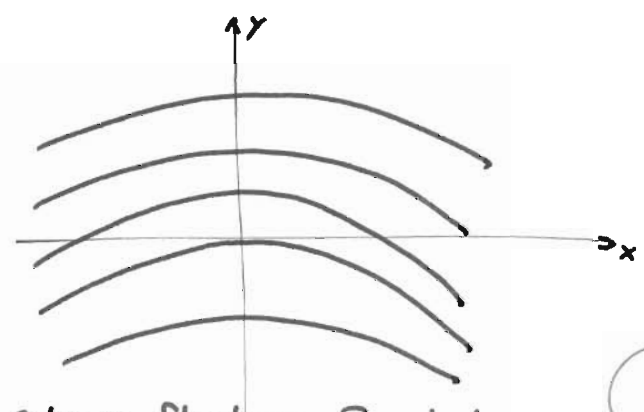
$$c_1 = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 10y} \quad (1)$$

$$c_2 = \sqrt{x^2 + 10y}$$

$$c_3 = x^2 + 10y \quad (1)$$

$$10y = -x^2 + c_3$$

$$y = -\frac{1}{10} \cdot x^2 + C_i \quad (1)$$



Schar flacher Parabeln gegen unten ... (2)

(⚠ nicht überall def. ⚠)

5

(c) Wie skizzieren Sie mit Mathematica folgende Funktion für $-3 \leq x \leq 3$ und $5 \leq y \leq 10$?

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 y & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$$

```
f[x_,y_] := x^2 * y     /; x>=0
f[x_,y_] := 0           /; x<0

Plot3D [f[x,y], {x,-3,3}, {y,5,10} ]
```

3

- perfekt richtig: 3 Pt.
- 1 kleiner Fehler: 2 Pt.
- relevante Ansätze: 1 Pt.