Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Mathematik
Klasse 4d	20.6.2005
Serie 43	**Test**

Name | Vorname | 40 Pt. total → Note

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1

7 Pt.

Der Widerstand R eines homogenen Quaders (Abgriffe an gegenüberliegenden, quadratischen Seitenflächen) ist proportional zum Abstand d der Seitenflächen und umgekehrt proportional zum Quadrat der Länge l der Seitenflächen. Der Abstand d kann auf 3% genau und die Seitenlänge l auf 2% genau gefertigt werden. Mit welchem maximalen Fehler muss man beim Widerstand $R(d, l)$ rechnen?

$$R(d, l) = k \cdot \frac{d}{l^2}$$ 2

$$d = d_0 \pm 0.03 \cdot d_0$$
$$l = l_0 \pm 0.02 \cdot l_0$$

$$\Delta R = R_d \cdot \Delta d + R_l \cdot \Delta l$$ 1

$$= \frac{k}{l_0^2} \cdot (\pm 0.03 \cdot d_0) + k \cdot (-2) \cdot \frac{d_0}{l_0^3} \cdot (\pm 0.02 \cdot l_0)$$ 2

$$= \frac{k \cdot d_0}{l_0^2} \cdot (\pm 0.03) + \frac{k \cdot d_0}{l_0^2} \cdot (-2) \cdot (\pm 0.02)$$

$$= \frac{k \cdot d_0}{l_0^2} \cdot (\pm 0.07)$$ 1

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm 0.07$$ d.h. $\underline{\underline{7\%}}$ 1

– überall ohne Fehler k : -2 Pt.

Aufgabe 2 (9 Pt.)

9 Pt.

Berechnen Sie die Extremalstellen dieser Funktion: $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot e^{-x}$

(Vollständige Herleitung inkl. 2. Ableitungen!)

$$f_x = 2x \cdot e^{-x} + (x^2+y^2)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (2x - x^2 - y^2)\cdot e^{-x}$$ 1

$$f_y = 2y \cdot e^{-x}$$ 1

$\underline{f_x = 0}$:

$$(2x - x^2 - y^2)\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0$$

$$2x - x^2 - y^2 = 0$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (2-x) = 0$$

$$\underline{\underline{x=0}} \qquad \underline{\underline{x=2}}$$

$\underline{f_y = 0}$:

$$2y \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\underline{\underline{y=0}}$$

3

$$f_{xx} = (2-2x)\cdot e^{-x} + (2x - x^2 - y^2)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

$$= (2 - 4x + x^2 + y^2)\cdot e^{-x}$$

$$f_{yy} = 2 \cdot e^{-x}$$

$$f_{yx} = -2y \cdot e^{-x}$$

2

$\underline{(0;0)}$ $\quad f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{yx}^2 = 2\cdot 2 - 0 = 4 > 0$

$f_{yy} = 2 > 0 \implies$ <u>Minimum bei (0;0)</u>

$\underline{(2;0)}$ $\quad f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{yx}^2 = -2\cdot e^{-2}\cdot 2\cdot e^{-2} - 0 < 0$

d.h. <u>keine Extremalstelle bei (2;0)</u>

2

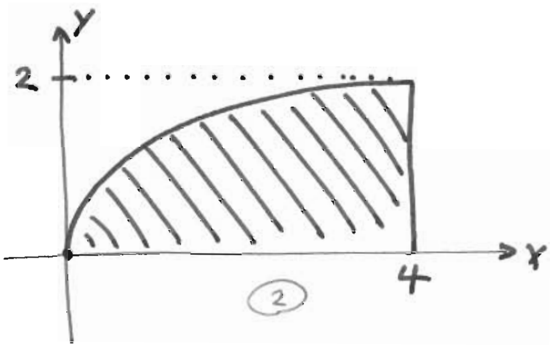
9

Aufgabe 3 (4+5+5 Pt.)

14 Pt.

(a) Schreiben Sie das Integral $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cdot \cos x^2 \, dx \, dy$ in der Form $\iint y \cdot \cos x^2 \, dy \, dx$.

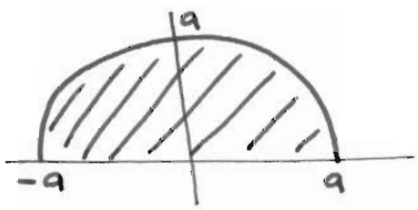
(Ohne Berechnung, jedoch mit Skizze Integrationsgebiet)



$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \cdot \cos x^2 \cdot dy \cdot dx$$ 2

4

(b) $\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}} \, dy \, dx = \int_0^{\pi} \underbrace{\int_0^{a} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr}_{\left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=a}} \cdot d\varphi$ 3



$$\left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=a} = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{-a^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-a^2}\right)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-a^2}\right) \cdot d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - e^{-a^2}\right)$$

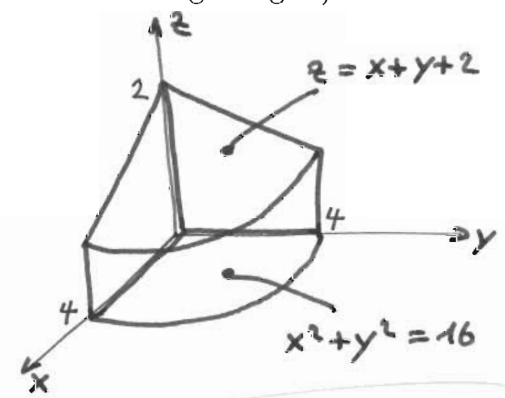
5

(c) Ein Körper liegt im 1. Oktanten (d.h. $x, y, z \geq 0$) und wird durch die Flächen $z = x + y + 2$ und $x^2 + y^2 = 16$ begrenzt. Skizzieren Sie den Körper und stellen Sie das Integral zur Berechnung seines Volumens in Polarkoordinaten auf. (Ohne Berechnung Integral)

1

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{4} \underbrace{(x+y+2)}_{r \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi) + 2} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

1



3

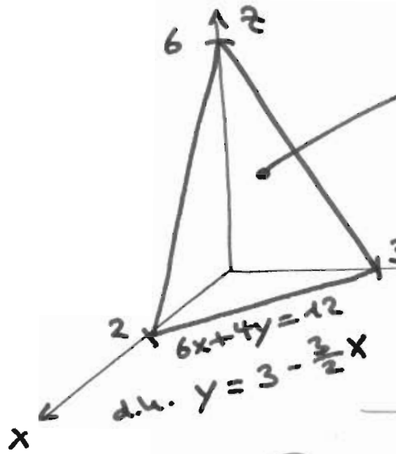
5

Aufgabe 4 (5+5 Pt.)

10 Pt.

(a) Skizzieren Sie die Ebene $6x + 4y + 2z = 12$ für $x, y, z \geq 0$.

Wie lautet das Integral zur Berechnung der Oberfläche dieser Ebene? (ohne Berechnung)



$z = f(x,y) = 6 - 3x - 2y$

$f_x = -3$

$f_y = -2$

2

1

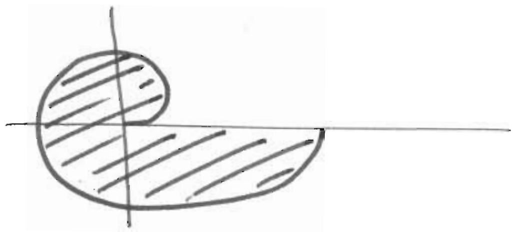
$$O = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}\cdot x} \underbrace{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1}}_{\sqrt{14}} \cdot dy \cdot dx$$

1

1

5

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die Archimedische Spirale $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ $(a > 0)$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschließt.



$$A = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{a\cdot\varphi} 1 \cdot r \cdot dr}_{\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a\cdot\varphi}} \cdot d\varphi$$

3

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cdot \varphi^2}{2} \cdot d\varphi$$

$$= \left[\frac{a^2 \cdot \varphi^3}{6}\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2 \cdot (2\pi)^3}{6} = \underline{\underline{\frac{4\pi^3}{3} \cdot a^2}}$$

2

5