

**Serie 42**

**Test**

Name

Vorname

38  
Pt. total

Note

- Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 70 Minuten.

5  
Pt.

**Aufgabe 1 (5 Pt.)**

Bestimmen Sie die Ableitung  $\frac{dz}{dt}$  der Funktion  $z = e^{2 \cdot (x^2 + y^2)}$  mit der verallgemeinerten Kettenregel längs der Kurve  $x(t) = 2 \cdot \cos t$ ,  $y(t) = 2 \cdot \sin t$ .

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z_x \cdot \dot{x} + z_y \cdot \dot{y} \\ &= e^{2 \cdot (x^2 + y^2)} \cdot 4x \cdot 2 \cdot (-\sin t) + e^{2 \cdot (x^2 + y^2)} \cdot 4y \cdot 2 \cdot \cos t \\ &= e^{2 \cdot (-)} \cdot 16 \cdot \sin t \cdot \cos t - e^{2 \cdot (-)} \cdot 16 \cdot \sin t \cdot \cos t \\ &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

5

Hinweis: Direktes Einsetzen wäre hier möglich:

$$z = e^{2 \cdot (4)} = e^8, \text{ also}$$

$$\dot{z} = 0$$

0 Pt.

Aufgabe 2 (2+2+2+5 Pt.)

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y} \quad \text{und} \quad P = (2; 1)$$

- (a) In welcher Richtung hat die Funktion  $f$  im Punkt  $P$  den größten Zuwachs?

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + y$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} \\ -\frac{x^2}{y^2} + 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

2

- (b) Wie groß ist dieser Zuwachs?

$$|\nabla f(2, 1)| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \underline{\underline{5}}$$

2

- (c) In welcher Richtung ist im Punkt  $P$  der Zuwachs Null? (Richtung normieren)

orthogonal zu  $\nabla f(2, 1)$ , z.B.  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$

normiert:  $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}}} \quad \textcircled{1}$  (Pt. nur, falls auch erster Pt.)

2

- (d) Wie sehen die Niveaulinien von  $f$  aus?

$$c = \frac{x^2 + y^2}{y} \quad \textcircled{1}$$

$$c \cdot y = x^2 + y^2$$

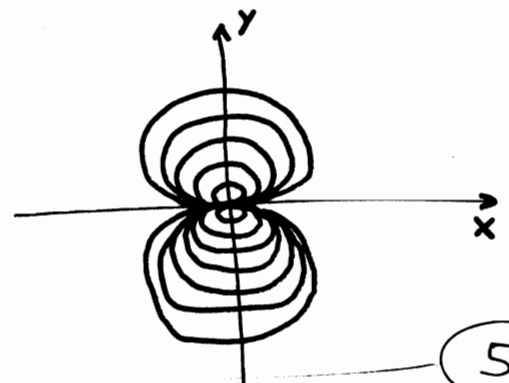
$$x^2 - c \cdot y + y^2 = 0 \quad | \quad 2\bar{c} = -c$$

$$x^2 + 2\bar{c} \cdot y + y^2 = 0 \quad | \quad \text{quad. Erg\u00e4nzen}$$

$$x^2 + \underbrace{\bar{c}^2 + 2\bar{c}y + y^2}_{(y+\bar{c})^2} = \bar{c}^2$$

$$x^2 + (y + \bar{c})^2 = \bar{c}^2 \quad \textcircled{3}$$

Dies sind Kreise um  $(0; -\bar{c})$  mit Radius  $\bar{c}$



5

1

Aufgabe 3 (3x4 Pt.)

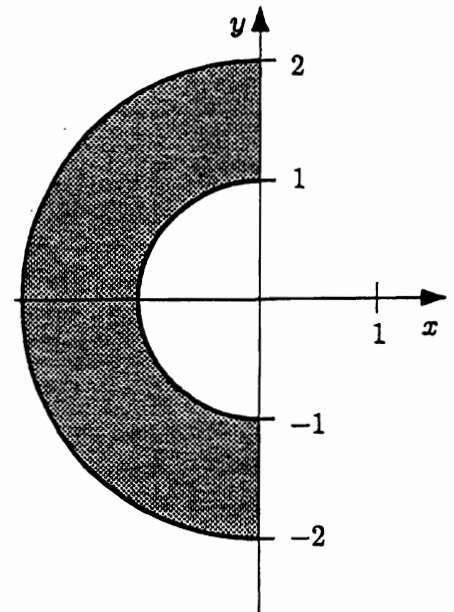
12  
Pt.

(a) Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

über die skizzierte Fläche.

Polarkoordinaten:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



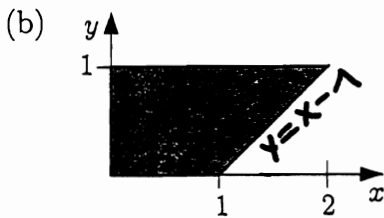
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_1^2 \left( \frac{1}{r} \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \quad (2)$$

$[r]_1^2 = 1$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}} \quad (1)$$

4

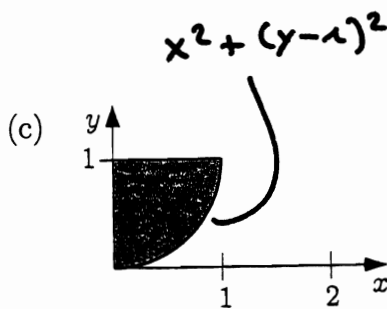
Die Funktion  $f(x, y) = x \cdot y$  soll über dem abgebildeten Gebiet integriert werden. Stellen Sie hierfür die Doppelintegrale in der verlangten Form auf.



$$\iint f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xy dy dx + \int_1^2 \int_{x-1}^1 xy \cdot dy \cdot dx \quad (2)$$

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{y+1} xy \cdot dx \cdot dy \quad (2)$$

4



$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\iint f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 xy \cdot dy dx \quad (2)$$

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} xy \cdot dx \cdot dy \quad (2)$$

4

- (b)+(c) : 2Pd. nur, falls 100% perfekt.
- 2 Integrale statt einem : 0Pd. (oder eines statt denen zwei)
- Fkt.-Gleichung falsch herausgelesen : Fehler wird doppelt x zählt.

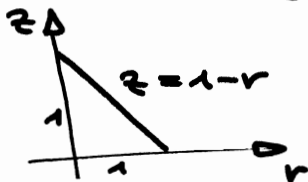
Aufgabe 4 (2+2+4+2 Pt.)

10  
Pt.

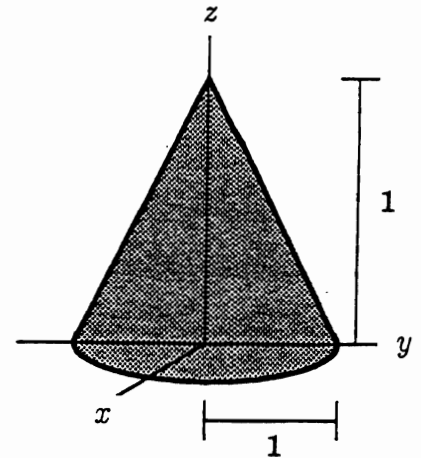
Berechnen Sie mit einem Zweifach-Integral die Oberfläche des skizzierten Kegels (ohne Grundfläche) wie folgt:

- (a) Wie lauten die Funktion, die die Oberfläche des Kegels beschreibt, in der Form:

$$z = f(r) = \underline{\underline{1-r}}$$



(2)



- (b) Wie lauten die Funktion, die die Oberfläche des Kegels beschreibt, in der Form:

$$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(2)

- (c) Wie lautet das Integral für die Oberfläche des Kegels in rechtwinkligen Koordinaten?

$$f_x = -\frac{1 \cdot 2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = 2$$

$$\text{also: } 0 = \int_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot dA$$

$$0 = 4 \cdot \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2} \cdot dy \cdot dx$$

$$\underline{\underline{\hspace{10em}}}$$

(4)

- (d) Wie lautet das Integral für die Oberfläche des Kegels in Polar-Koordinaten?

$$0 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$\underline{\underline{\hspace{10em}}}$$

(2)