Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy — Mathematik in Systemtechnik II

Block Informatik — 16.2.2004

Serie 8 — Test

Name	Vorname	Pt. total	→	Note
		27	→	

– Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
– Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
– Zeit: 50 Minuten.

–a–c : 100 % richtig + prägnant : 2 Pt.
: im Prinzip verstanden : 1 Pt.

Aufgabe 1 (2+2+2+4 Pt.)

10 Pt.

(a) Wann setzt man Taylor-, wann setzt man Fourier-Reihen ein?
Nennen Sie den Hauptunterschied!

Taylor-Reihe i.A. für nicht-periodische Funktionen.
Fourier-Reihe i.A. für periodische Funktionen. (2)

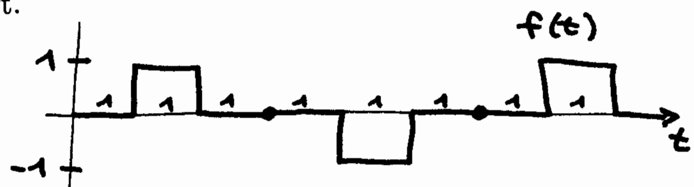
(b) Worin unterscheidet sich eine Taylor- von einer Fourier-Reihe?
Nennen Sie den Hauptunterschied!

Taylor-Reihe besteht aus Potenzen.
Fourier-Reihe besteht aus $\underbrace{\sin(\cdot) \text{ und } \cos(\cdot)}_{\text{oder } e^{j\cdots}}$. (2)

(c) $f(t) = t^2$ ist definiert auf der Periode $T: \ -1 \leq t \leq 1$, und $f(t)$ ist T-periodisch.
Können Sie ohne zu rechnen eine Aussage über die Fourier-Koeffizienten von $f(t)$ machen?

f(t) ist eine gerade Funktion, ← Begründung muss für 2 Pt. vorhanden sein!
d.h. es kommt nur der cos(·) vor! (2)

(d) $f(t)$ ist gemäß nebenstehender Skizze definiert.
Wie lautet die Fourier-Reihe von $f(t)$?
Die ersten beiden Glieder genügen.
Sie dürfen die FS benützen!



lokalisiert: (1)

Gemäss FS, S. 186: $\hat{y}=1,\ a=1,\ b=1,\ T=6,\ f=1/6,\ \omega=\frac{\pi}{3}$ (1)

$$f(t) = -\frac{4}{\pi}\cdot\left(\underbrace{\frac{\cos(\pi/3)}{1}}_{1/2}\cdot\sin(\pi/3\cdot t) + \underbrace{\frac{\cos(3\cdot\pi/3)}{3}}_{-1/3}\cdot\sin(3\cdot\tfrac{\pi}{3}\cdot t) + \cdots\right)$$ (1)

also:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot t\right) - \frac{1}{3}\cdot\sin(\pi\cdot t) + \ldots\right)$$ (1) (4)

– anfangen rechnen: 0 Pt.

Aufgabe 2 (8 Pt.)

8 Pt.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & : \sin(t) \geq 0 \\ 0 & : \sin(t) < 0 \end{cases} \quad \text{mit } T = 2\pi. \qquad \text{Tipp: } \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

Berechnen Sie ω und c_k für $k \neq 0$. Ohne FS!

$T = 2\pi$, $f = \frac{1}{2\pi}$, $\omega = 2\pi \cdot f = 1$ (1)

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot 1 \cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4\pi j} \int_0^{\pi} \left(e^{j \cdot (1-k) \cdot t} - e^{j \cdot (-1-k) \cdot t} \right) \cdot dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4\pi j} \cdot \left[\frac{e^{j \cdot (1-k) \cdot t}}{j \cdot (1-k)} + \frac{e^{j \cdot (-1-k) \cdot t}}{j \cdot (+1+k)} \right]_0^{\pi} \quad (1) \quad \text{(auch ohne Plus)}$$

$$= \frac{1}{4\pi j} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot (1-k) \cdot \pi} - 1}{j \cdot (1-k)} + \frac{e^{j \cdot (-1-k) \cdot \pi} - 1}{j \cdot (1+k)} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot (1-k) \cdot \pi} - 1}{1-k} + \frac{e^{j \cdot (-1-k) \cdot \pi} - 1}{1+k} \right) \quad (1)$$

$$= \begin{cases} 0 & : k \text{ ungerade} \\ -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{-2}{1-k} + \frac{-2}{1+k} \right) & : k \text{ gerade} \end{cases} \quad (1)$$

$$= \begin{cases} 0 & : k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-k^2} & : k \text{ gerade} \end{cases} \quad (1)$$

8

Aufgabe 3 (3+3+3 Pt.)

Pt. 9

(a) Sie haben $c_k = \dfrac{-j}{2k\pi} + \dfrac{-1}{(k\pi)^2}$. Berechnen Sie a_k, b_k und A_k für $k \neq 0$.

$$\underline{\underline{a_k}} = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_k) = 2 \cdot \frac{-1}{(k\pi)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{(k\pi)^2}}} \quad 1$$

$$\underline{\underline{b_k}} = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_k) = -2 \cdot \frac{-1}{2k\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{k\pi}}} \quad 1$$

$$\underline{\underline{A_k}} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{\frac{4}{(k\pi)^4} + \frac{1}{(k\pi)^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{(k\pi)^2}\sqrt{4 + (k\pi)^2}}} \quad 1$$

muss ausgeklammert sein für 3. Pt. !

3

(b) Sie wollen einen Abtastvektor der Länge 1024 Fourier-transformieren. Sie verwenden nicht FFT, sondern das Verfahren über die Matrix-Multiplikation. Die Matrix haben Sie bereits hergestellt. Wieviele Multiplikationen benötigen Sie für die Transformation?

$$\underset{1024\times 1}{\vec{\gamma}} = \underset{1024\times 1024}{M} \cdot \underset{1024\times 1}{\vec{f}}$$

Für jedes γ_k ein 1024 – Skalarprodukt,

d.h. $1024 \cdot 1024 = 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20}$ Multiplikationen !

$(= 1048576)$

3

– volldurchblickt + saubere Begründung : 3 Pt.
– etwas schwammig : 2 Pt.
– Ansätze : 1 Pt. (z.B. korrekt, ohne Begründung)

(c) Sie haben mit dem MATLAB `fft` - Befehl einen reellen Abtastvektor der Länge 1024 transformiert. Nun möchten Sie das Resultat mit möglichst wenig Speicherbedarf sichern. Welche Komponenten des Vektors speichern Sie ab, und wieviele `Reals` sind dies total?

<u>Die erste Hälfte</u> (2) des Vektors genügt (zweite Hälfte ist konj. komplexe Kopie), dies sind 512 komplexe Zahlen à 2 Reals, d.h. total <u>1024 Reals</u> (1)

3