Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs NTB, Sy	Mathematik in Systemtechnik II
Block Informatik	25.2.2005

Serie 7 — Test

Name: ____ Vorname: ____ 33 Pt. total → Note: ____

- Punkteabzug oder keine Punkte für schwer verständliche oder unnötig komplizierte Lösungen.
- Hilfsmittel: nur Formelsammlung.
- Zeit: 70 Minuten.

Aufgabe 1 (2+3+4+3 Pt.)

12 Pt.

(a) $\boxed{c_{15} = 17.4 - 32.6\,j}$ Was ist c_{-15}?

$c_{-15} = c_{15}^{*}$ (1) $= 17.4 + 32.6\,j$ (1)

2

(b) $\boxed{g(t) = 2 + 7\cdot\cos(3\,t)}$ mit der Periode $T = 2\pi$. Wie lauten die reellen Fourierkoeffizienten?

$g(t) = \frac{4}{2} + 0\cdot\cos(t) + 0\cdot\cos(2t) + 7\cdot\cos(3t) + 0\cdots$

$a_0 = 4$ in jedem Fall 1 Pt.!

– Integration gibt keine Pt.

$a_3 = 7$ 2 Pt.

... und alle anderen Koeffizienten $= 0$ } ignoriert

3

(c) $\boxed{g(t) = \sqrt{2}\cdot\cos(3\,t + \frac{\pi}{4})}$ mit $T = 2\pi$. Wie lauten die reellen Fourierkoeffizienten?

$= \sqrt{2}\cdot\cos(3t)\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{1/\sqrt{2}} - \sin(3t)\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{1/\sqrt{2}}$

$= 1\cdot\cos(3t) - 1\cdot\sin(3t)$ (2)

$a_3 = 1$ $b_3 = -1$ ... und alle anderen Koeff. $= 0$

– def. keine Pt. bei Integration!

4

(d) $\boxed{g(t) = |\,t\,|}$ ist definiert auf der Periode $T: -1 \le t \le 1$, und $g(t)$ ist T-periodisch. Machen Sie ohne zu rechnen eine Aussage über die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k von $g(t)$.

$g(t)$ ist gerade! (1)

D.h. alle $b_k = 0$ (1)

D.h. $c_k \in \mathbb{R}$ (1) (und $c_{-k} = c_k$)

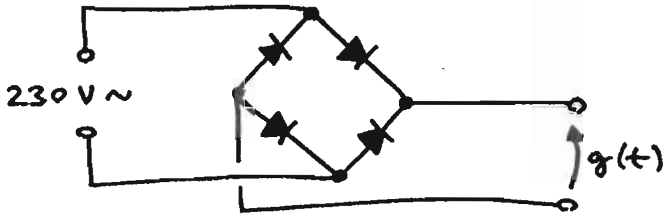
das möchte ich so sehen: – $c_k \in \mathbb{R}$
– c_k für reell

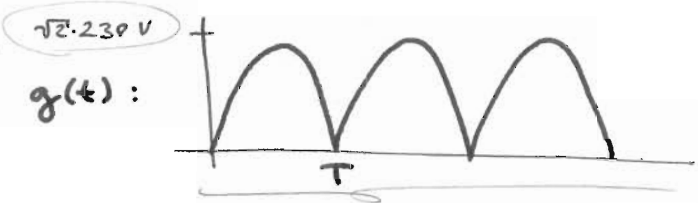
3

Aufgabe 2 (4 + 5 Pt.)

Pt. 9

(a) $g(t)$ wird mit einem Zweiweggleichrichter aus normalem 230 V-Netzstrom erzeugt.
Wie lautet die Fourier-Reihe von $g(t)$?
Die ersten beiden Glieder genügen.
Sie dürfen die FS benützen!





(1)

erkannt : (1)

$f = 100 \qquad \omega = 2\pi f \approx 628$

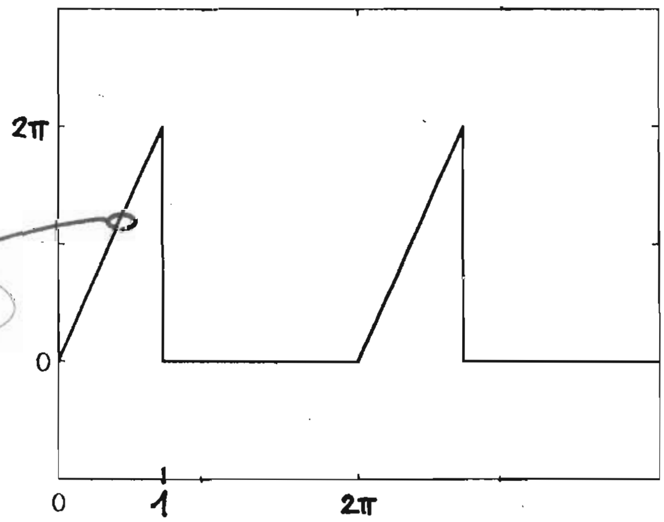
(1)

$$g(t) = \frac{2\sqrt{2} \cdot 230}{\pi} - \frac{4\sqrt{2} \cdot 230}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2 \cdot 628 \cdot t) + \cdots \right)$$

$\left(+ \frac{1}{15} \cdot \cos(4 \cdot 628 \cdot t) + \cdots \right)$

4

(b) Sie lesen dieses Signal $g(t)$ auf dem KO ab:
Berechnen Sie ω und c_k für $k \neq 0$.
Rechnung bis Auflösung Integral.
Ohne FS!



$T = 2\pi$

$f = \frac{1}{2\pi}$

$\omega = 1$

(1)

$g(t) = 2\pi \cdot t$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot 1 \cdot t} \cdot dt$$

(1)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{1} 2\pi \cdot t \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} \cdot dt$$

$$= \int_0^{1} t \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} \cdot dt$$

(1)

$$\overset{(343)}{=} \left[\left(\frac{-jk \cdot t - 1}{\underbrace{(-jk)^2}_{-k^2}} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} \right]_0^1 = \left[\frac{j \cdot k \cdot t + 1}{k^2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} \right]_0^1$$

(1)

$$= \frac{j \cdot k + 1}{k^2} \cdot e^{-j \cdot k} - \frac{1}{k^2}$$

(1)

5

Aufgabe 3 (3x1 + 3x3 Pt.)

12 Pt.

Die Grundfrequenz einer periodischen Funktion ist f, die zugehörige Kreisfrequenz ist ω, und k ist eine ganze Zahl. Vereinfachen Sie die Ausdrücke in den Teilaufgaben a - c.

(a) $e^{j\pi k} = \underline{\underline{(-1)^k}}$

1

(b) $e^{j\pi(2k+1)} = \underline{\underline{-1}}$

1

(c) $e^{jk\omega T} = e^{j \cdot k \cdot 2\pi f \cdot \frac{1}{f}} = e^{j \cdot k \cdot 2\pi} = \underline{\underline{1}}$

1

– Nur Endresultat: richtig / falsch!

(d) $g(t) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin(t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{1}{4} \cdot \sin(2t) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{8} \cdot \sin(3t) + \frac{1}{8} \cdot \cos(3t) + \cdots$

Wie lauten die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 des Amplitudenspektrums?

$\frac{a_0}{2} = 1 \implies a_0 = 2 \qquad \underline{\underline{A_0}} = \frac{|a_0|}{2} = \underline{\underline{1}}$ } (1)

$a_1 = b_1 = \frac{1}{2} \qquad \underline{\underline{A_1}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$a_2 = b_2 = \frac{1}{4} \qquad \underline{\underline{A_2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$ } (2)

ohne dies: – 1 Pt.

3

(e) Wie lautet das Abtasttheorem?

Bei einem Signal, das keine höheren Frequenzen als die Nyquist-Frequenz (= doppelte Abtastfrequenz) enthält, gilt $\gamma_k = c_k$, d.h. das Signal wird durch die DFT exakt dargestellt.

3

– einwandfrei + vollständig: 3 Pt.
– richtige Aussage aber ungenau: 2 Pt.
– relevante Ansätze: 1 Pt.

(f) Wie kann man Aliasing vermeiden?

– Abtastfrequenz mind. doppelt so hoch wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz wählen.

– Signal vor dem Abtasten filtern (= Antialiasing Filter), damit obige Bedingung erfüllt ist.

3

– Eine Möglichkeit ansatzweise: 1 Pt.
– Eine Möglichkeit exakt: 2 Pt.
– Zwei Möglichkeiten ansatzweise: 2 Pt.
– Eine exakt, eine ansatzweise (und mehr): 3 Pt.